Chapitre 8

Traitement des données

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE

53 Calculer la moyenne d'une liste

SOCLE

Pour calculer la moyenne d'une série de valeurs :
1. on additionne toutes les valeurs de la série ;
2. on divise cette somme par l'effectif total de la série.

★

1 Les trois gardiens de but d'une équipe de football ont 34 ans, 25 ans et 37 ans.
On désire calculer leur âge moyen.
Compléter :

$$M = \frac{34 + 25 + 37}{3} = \frac{96}{3} = 32$$

L'âge moyen des trois gardiens est 32 ans.

2 Voici les notes sur 20 de Victor et de Clara en mathématiques, au premier trimestre.
Victor : 15 ; 10 ; 9 ; 16 ; 14
Clara : 16 ; abs ; 12 ; 7 ; 15
Lequel des deux a eu la meilleure moyenne ?

Moyenne de Victor :
$$\frac{15+10+9+16+14}{5} = \frac{64}{5} = 12{,}8$$
Moyenne de Clara :
$$\frac{16+12+7+15}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$$
C'est Victor qui a eu la meilleure moyenne.

3 Ce tableau donne le nombre de spectateurs par ville lors d'une tournée d'un humoriste.

Nantes	Angers	Durtal	Pornic	Ancenis	Laval
1 865	1 133	372	221	439	560

a. Calculer le nombre moyen de spectateurs par ville.

$$M = \frac{1865+1133+372+221+439+560}{6} = 765$$

Il y a eu en moyenne 765 spectateurs par ville.

b. Compléter.
Le show de cet humoriste aurait eu le même nombre total de spectateurs dans ces six villes s'il avait eu 765 spectateurs par ville.

★★

4 On a relevé dans le tableau ci-dessous les points obtenus par Rémi et Eva lors de sept parties de fléchettes.
Le résultat d'Eva lors de la partie 6 a été égaré.

Partie	1	2	3	4	5	6	7
Rémi	41	35	87	68	28	74	31
Eva	12	62	7	100	81	65	30

1. Calculer le nombre moyen de points de Rémi.

$$\frac{41+35+87+68+28+74+31}{7} = \frac{364}{7} = 52$$

Rémi a obtenu une moyenne de 52 points.

2. Eva a obtenu en moyenne 51 points par partie.

a. Calculer le nombre total de ses points.

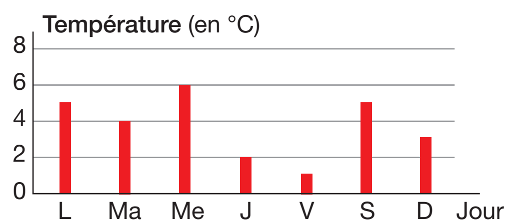
$51 \times 7 = 357$ ainsi Eva a obtenu 357 points en tout.

b. En déduire son résultat à la 6^{e} partie.

$12 + 62 + 7 + 100 + 81 + 30 = 292$ et $357 - 292 = 65$

Eva a obtenu 65 points à la 6^{e} partie.

5 Voici les températures relevées par Adil chaque matin d'une semaine (il s'agit de valeurs entières).



Calculer la moyenne des températures relevées. Donner la valeur approchée par défaut au dixième près.

$$M = \frac{5+4+6+2+1+5+3}{7} = \frac{26}{7} \quad M \approx 3{,}7\ °C$$

La température moyenne est environ 3,7 °C.

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

54 Calculer une moyenne pondérée

Pour calculer la moyenne d'une série de valeurs pondérées par les effectifs :
1. on multiplie chaque valeur par son effectif ;
2. on additionne tous ces produits ;
3. on divise cette somme par l'effectif total de la série.

★

1 Voici les longueurs (en cm) de 24 feuilles de marronnier.

39 41 39 40 42 44 42 38
38 39 40 44 41 39 41 42
39 44 41 40 39 41 39 40

On se propose de déterminer la longueur moyenne des feuilles à l'aide de ce tableau.

a. Compléter la colonne « Effectif ».

Longueur l (en cm)	Effectif n	Produit $l \times n$
38	2	76
39	7	273
40	4	160
41	5	205
42	3	126
44	3	132
Total	24	972

b. Compléter la colonne « Produit ».

c. En déduire la longueur moyenne des feuilles.

$\frac{972}{24} = 40{,}5$

La longueur moyenne des feuilles est 40,5 cm.

2 Voici la répartition des matchs du PSG selon le nombre de buts par match, au cours de la saison 2012-2013 de Ligue 1 de football.

Nombre de buts	0	1	2	3	4	Total
Effectif	4	14	10	5	5	38

a. Compléter la colonne « Total » de ce tableau.

b. Compléter.

$$M = \frac{0 \times 4 + 1 \times 14 + 2 \times 10 + 3 \times 5 + 4 \times 5}{38} = \frac{69}{38}$$

c. En déduire la valeur approchée par excès à l'unité près du nombre moyen de buts marqués par match. $M \approx 2$

★★

3 Lors d'un contrôle, on a pesé des barquettes de fraises marquées « 500 g ». Voici leurs masses.

Masse (en g)	495	500	505	510
Effectif	23	13	24	15

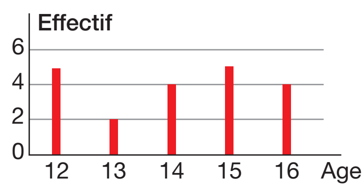
Calculer la valeur approchée par défaut à l'unité près de la masse moyenne, en g, de ces barquettes.

$$M = \frac{495 \times 23 + 500 \times 13 + 505 \times 24 + 510 \times 15}{23 + 13 + 24 + 15}$$

$M = \frac{37\,655}{75}$ $\quad M \approx 502$

La masse moyenne est environ 502 g.

4 Lara dirige une école de danse. Le diagramme ci-dessous indique la répartition de ses élèves selon leur âge.



a. Lara a calculé que l'âge moyen de ses élèves est légèrement supérieur à 14 ans. Est-ce exact ?

$$\frac{12 \times 5 + 13 \times 2 + 14 \times 4 + 15 \times 5 + 16 \times 4}{5 + 2 + 4 + 5 + 4} = \frac{281}{20} = 14{,}05$$

Lara a raison.

b. Pour participer à un concours, l'âge moyen doit être inférieur ou égal à 14 ans. Lara peut inscrire un nouvel élève, soit de 13 ans soit de 15 ans. Lequel va-t-elle choisir ? Pourront-ils participer au concours ?

Pour diminuer l'âge moyen, elle doit choisir le plus jeune, celui de 13 ans.
La moyenne d'âge devient :

$$\frac{281 + 13}{20 + 1} = \frac{294}{21} = 14$$

Ils pourront participer au concours.

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

55 Utiliser un tableur : tableaux

★

1 SOCLE Des études de la fédération française de cardiologie ont montré que 80 % des victimes d'infarctus ayant moins de 45 ans sont fumeurs. Dans une petite ville, parmi les 7 000 habitants de moins de 45 ans, 2 800 sont fumeurs ; 210 ont été victimes d'infarctus, dont 168 fumeurs.
Avec un tableur, réaliser cette feuille de calcul, pointer les données de l'énoncé, puis compléter entièrement ce tableau.

	A	B	C	D
1		Fumeurs	Non fumeurs	Total
2	Victimes d'infarctus	168	42	210
3	Non victimes d'infarctus	2 632	4 158	6 790
4	Total	2 800	4 200	7 000

2 SOCLE Ce tableau présente les frais de transport de Samuel chaque jour d'une semaine.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Jour	L	Ma	Me	J	V	S	Total
2	Frais (en €)	45,82	30,93	18,75	25,43	9,17	27,64	157,74
3	Moyenne	26,29						

a. Réaliser cette feuille de calcul avec un tableur. Quelle formule saisit-on :

- en cellule H2 ? =SOMME(B2:G2)
- en cellule B3 ? =MOYENNE(B2:G2) ou =H2/6

b. Compléter les cellules jaunes. Quelle a été la dépense moyenne de Samuel en frais de transport au cours de cette semaine ?

En moyenne, Samuel a dépensé 26,29 €.

3 Ce tableau résume les réponses à une enquête : « Combien de films avez-vous vus dans une salle de cinéma pendant les vacances ? ».

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de films	0	1	2	3	4	5	Total
2	Nombre d'élèves	126	74	105	122	61	32	520
3								
4	Somme des produits	1 054						
5	Moyenne	2,027						

a. Réaliser cette feuille de calcul avec un tableur. Quelle formule saisit-on en cellule B4 ?

=SOMMEPROD(B1:G1;B2:G2)

b. Compléter les cellules jaunes. Combien de films en moyenne ont été vus pendant les vacances par les personnes interrogées ?

En moyenne, ils ont vu 2 films.

★★

4 SOCLE Le baril est l'unité de mesure utilisée pour mesurer les quantités de pétrole brut produites (un baril équivaut à environ 159 L).
Une compagnie pétrolière décide de faire passer sa production mensuelle de 178 000 barils à 237 000 barils en deux ans.
Deux possibilités sont envisagées :
- option 1 : augmenter la production de 2 459 barils chaque mois ;
- option 2 : augmenter de 1,1 % la production chaque mois.

On utilise un tableur pour vérifier si l'objectif peut être atteint. Voici le début de ce tableau.

	A	B	C
1	Rang du mois	Option 1	Option 2
2	0	178 000	178 000
3	1	180 459	179 958
4	2	182 918	181 938

1. a. Avec un tableur, recopier les lignes 1 et 2.

b. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 et qu'on recopiera ensuite vers le bas ?

=B2+2 459

c. Parmi les six formules suivantes, entourer celle(s) qui a(ont) pu être saisie(s) dans la cellule C3 et qu'on recopiera ensuite vers le bas ?

=C2+1,1 | =1,1/100*C2 | =C2 +1,1/100*C2 | =1,011*C2 | =C2 + 1,1/100 | =0,011*C2

d. Étendre le tableau jusqu'à la ligne 26. Formater les cellules pour n'afficher que des nombres entiers.

2. L'objectif de la compagnie est-il atteint :

a. avec l'option 1 ? Oui, car au bout de 2 ans (24 mois), la production sera de 237 016 barils.

b. avec l'option 2 ? Non, car au bout de 2 ans, la production ne sera que de 231 445 barils environ.

3. On décide de modifier le taux de l'option 2 en passant de 1,1 % à 1,2 %. Modifier la formule en cellule C3 et la recopier vers le bas. L'objectif est-il alors atteint ?

Oui, avec une production de 237 002 barils environ.

CALCUL MENTAL	• …………	• …………	• …………	• …………	• …………	Note
	• …………	• …………	• …………	• …………	• …………	….. / …..

FICHE

56 Utiliser un tableur : graphiques

★

1 SOCLE **a.** Avec un tableur, recopier cette feuille de calcul qui donne la répartition des temps (arrondis à la minute) lors d'une course cycliste.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Temps (en min)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
2	Effectif	3	6	10	9	12	3	2	1	0	1	2	1

b. On se propose de représenter ces données par un diagramme en barres.
Sélectionner le tableau et insérer un diagramme (cliquer sur).
Dans l'assistant de diagramme :
1. Type du diagramme : « Colonne » et « Normal ».
2. Plage de données :
- cocher « Séries de données en ligne » ;
- cocher « Première ligne comme étiquette ».

4. Éléments du diagramme :
- titre : Répartition des temps
- Axe X : Temps (en min) ; Axe Y : Effectif

Décocher « Afficher la légende ».

2 SOCLE **1.** Recopier cette feuille de calcul qui donne la répartition de la flotte de pêche en 2012 en France métropolitaine *(Source : INSEE)*.

	A	B
1	Longueur	Effectif
2	Moins de 12 m	3 645
3	De 12 m à moins de 24 m	741
4	24 m ou plus	192

2. On se propose de représenter ces données par un diagramme circulaire.

a. Sélectionner le tableau et insérer un diagramme. Dans l'assistant de diagramme :
1. Type du diagramme : « Secteur » et « Normal ».
4. Éléments du diagramme : saisir le titre et décocher la légende.

b. Sélectionner le diagramme et insérer des étiquettes de données.
Les formater. Cocher « Afficher la valeur sous forme de pourcentage » et « Afficher la catégorie ».
Dans Placement, choisir « À l'extérieur ».

c. Boris : « Plus des trois quarts des bateaux mesurent moins de 12 m. ». Est-ce exact ?

Oui, car le pourcentage est 80 % (80 % > 75%).

★★

3 SOCLE **a.** Recopier cette feuille de calcul qui donne l'évolution du rythme cardiaque d'un sportif. Dans la colonne A, fusionner des cellules et formater les cellules (onglet Alignement).

b. On se propose de réaliser un graphique montrant cette évolution. Sélectionner la plage B1:C21 et insérer un diagramme.
Dans l'assistant de diagramme :
1. Choisir « Ligne » et « Points et lignes ».
2. Cocher « Première colonne comme étiquette ».
4. Titre : Évolution du rythme cardiaque
- Axe X : Temps (en min)
- Axe Y : Rythme cardiaque (en pulsations par min).

	A	B	C
1		Temps (en min)	Rythme cardiaque (en pulsations par min)
2	Au repos	1	65
3		2	65
4		3	64
5		4	64
6	Pendant la course	5	70
7		6	105
8		7	132
9		8	139
10		9	137
11		10	140
12		11	139
13		12	140
14		13	142
15		14	142
16	Récupération	15	137
17		16	123
18		17	98
19		18	72
20		19	65
21		20	65

c. Commenter l'évolution du rythme cardiaque de ce sportif.

• Lorsque le sportif est au repos, son rythme cardiaque est régulier (environ 65 pulsations par minute).
• Pendant la course, le rythme cardiaque augmente rapidement au début, puis se stabilise (environ 140 pulsations par minute).
• Pendant la récupération, le rythme cardiaque diminue rapidement puis retrouve le niveau initial.

4 SOCLE **a.** Recopier cette feuille de calcul qui donne l'évolution de la teneur en dioxygène dans l'eau d'une rivière en fonction de la température de l'eau.

	A	B
1	Température de l'eau (en °C)	Teneur en dioxygène (en mg/L)
2	0	14,6
3	4	13
4	8	11,6
5	12	10,5
6	16	9,5
7	20	8,7
8	24	8,1
9	28	7,6

b. Réaliser un graphique représentant cette évolution.

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....
Note ..... / .....

FICHE
57 Perfectionnement

★★★

1 Dans le cadre de la protection du bouquetin des Alpes, des biologistes ont mesuré des bouquetins. Voici leurs relevés.

Longueur (en m)	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
Effectif	28	45	31	30	37	15	54

a. Calculer la longueur moyenne des bouquetins.

a. $28+45+31+30+37+15+54=240$
On effectue tous les produits 1×28 ; $1{,}1\times45$; … et on les additionne. On trouve 314,4.
$\frac{314{,}4}{240}=1{,}31$ La moyenne est 1,31 m.

b. Avec un tableur, réaliser un diagramme en « Colonne » représentant ces données.

2 Dans une maternité, on note les périmètres crâniens des nouveau-nés à la naissance.
Voici ce qui a été enregistré au cours d'un week-end.

	Samedi				**Dimanche**		
Périmètre (en cm)	33	34	35	36	32	34	35
Effectif	2	3	10	5	2	1	7

1. Déterminer la moyenne des périmètres crâniens des bébés nés :

a. le samedi **b.** le dimanche

a. $2+3+10+5=20$
$\frac{698}{20}=34{,}9$
Le samedi, la moyenne est 34,9 cm.

b. $2+1+7=10$
$\frac{343}{10}=34{,}3$
Le dimanche, la moyenne est 34,3 cm.

2. Tania : « La moyenne des périmètres crâniens des bébés nés ce week-end est $\frac{34{,}9+34{,}3}{2}$, c'est-à-dire 34,6 cm ». Est-ce vrai ?

C'est faux car le nombre de bébés nés n'est pas le même le samedi et le dimanche.
Elle aurait dû calculer : $\frac{698+343}{20+10}=\frac{1041}{30}=34{,}7$.
La moyenne est 34,7 cm.

3 Associer chaque début de phrase à la fin qui lui correspond.

Début	Fin
Si on enlève les valeurs extrêmes de la série 2 ; 5 ; 19 ; 24 ; 30 la moyenne …	est comprise entre 7 et 18
La valeur manquante dans la série 16 ; 5 ; 9 ; ? ; 23 ; 10 dont la moyenne est 13 …	ne change pas
La moyenne d'une série dont les valeurs extrêmes sont 7 et 18 …	change
Si on enlève les valeurs extrêmes de la série 5 ; 10 ; 12 ; 16 ; 18 ; 29 la moyenne …	est égale à 15

4 Ce tableau donne la valeur en euros du Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance (noté SMIC) horaire brut de 2001 à 2012 *(Source : INSEE)*.

Année	**SMIC horaire brut (en €)**
2001	6,53
2002	6,75
2003	7,01
2004	7,40
2005	7,82
2006	8,15
2007	8,36
2008	8,61
2009	8,77
2010	8,86
2011	9,02
2012	9,31

a. Calculer le SMIC horaire brut moyen entre 2001 et 2012. En donner la valeur approchée par excès au centième près.

b. Pablo affirme : « Sur cette période, plus de 50 % de ces SMIC sont plus élevés que le SMIC moyen ». A-t-il raison ? Expliquer.

a. $6{,}53+6{,}75+\ldots+9{,}02+9{,}31=96{,}59$
Ainsi $M=\frac{96{,}59}{12}$ d'où $M\approx8{,}05$
Le montant du SMIC moyen est environ 8,05 €.
b. Le SMIC a été supérieur à 8,05 € de 2006 à 2012, soit 7 années sur les 12, ce qui correspond à plus de la moitié.
Pablo a raison.

FICHE 58

QCM et jeux

QCM

Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

Note ..... / 5

A	La moyenne de la série de nombres 23 ; 29 ; 31 ; 35 ; 42…	est une valeur de la série	est comprise entre 23 et 42	est égale à 32
B	La moyenne de toute série comprenant six nombres supérieurs à 10 et cinq nombres inférieurs à 10 est…	supérieure à 10	égale à 10	inférieure à 10
C	Voici les réponses à la question : « Combien de fois vous êtes-vous lavé les dents hier ? » Nombre de fois : 1 ; 2 ; 3 ; 4 Effectif : 2 ; 11 ; 7 ; 5 Pour déterminer le nombre moyen de fois où les personnes interrogées se sont lavé les dents, on calcule…	(1 + 2 + 3 + 4) : 4	(2 + 11 + 7 + 5) : 4	(2 + 22 + 21 + 20) : 25
D	En France, le nombre moyen d'enfants par femme est de 2. Donc…	toutes les femmes donnent naissance à 2 enfants	certaines femmes donnent naissance à plus de 2 enfants	certaines femmes donnent naissance à moins de 2 enfants
E	Pour calculer la moyenne de la série de valeurs ci-dessous : Ligne 1 : A = 103 ; B = 87 ; C = 125 ; D = (vide) dans la cellule D1, on entre la formule…	=(A1+B1+C1)/3	=MOYENNE(A1:C1)	=MOYENNE(A1;C1)

jeu 1

Après quatre contrôles, Tom a 4 de moyenne.
Les notes peuvent être 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
Laquelle de ces phrases ne peut pas être vraie ?

① Tom n'a eu que des 4.
② Tom a eu deux 3.
③ Tom a eu trois 3.
④ Tom a eu un 1.
⑤ Tom a eu deux 4.

D'après *Kangourou des mathématiques*

Réponse : La phrase ③

Tom a 4 de moyenne donc la somme de ses 4 notes est 16. Il ne peut pas avoir eu trois 3, car même s'il a eu la note maximale 5 au 4e contrôle, la somme de ses notes est 14 au maximum. La phrase ③ n'est pas vraie.

Les autres phrases sont vraies :
① Évident
② Il a eu 3, 3, 5 et 5.
④ Il a eu 1, 5, 5 et 5.
⑤ Il a eu 4, 4, 5 et 3.

jeu 2

Une famille est composée du père, de la mère et de plusieurs enfants. La moyenne des âges des membres de cette famille est 20 ans.
Si on ne tient pas compte de la mère, âgée de 35 ans, la moyenne des âges des membres de la famille n'est plus que de 17 ans.
Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

Réponse : Il y a 4 enfants.

On désigne par n le nombre de membres de cette famille.
La somme de tous les âges est $20 \times n$.
La somme des âges sans la mère est $20 \times n - 35$ mais aussi $17 \times (n - 1)$.
On résout l'équation : $20n - 35 = 17(n - 1)$.
On obtient $20n - 35 = 17n - 17$ soit $3n = 18$ donc $n = 6$.
Il y a donc 4 enfants.

Chapitre 9

Théorème de Pythagore

CALCUL MENTAL	• …………	• …………	• …………	• …………	• …………	Note
	• …………	• …………	• …………	• …………	• …………	….. / …..

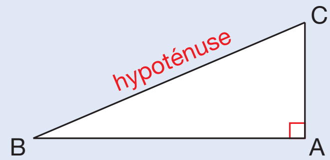
FICHE

59 Triangle rectangle : longueur d'un côté

SOCLE

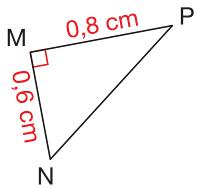
Théorème de Pythagore : Si un triangle est **rectangle, alors** le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Par exemple, le triangle ABC ci-contre est rectangle en A, d'où **l'égalité de Pythagore** : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



★

1 MNP est le triangle rectangle en M représenté ci-contre.



a. Écrire l'égalité de Pythagore pour ce triangle rectangle.

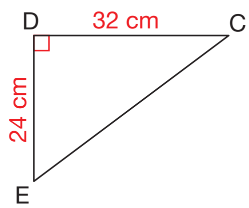
$NP^2 = MN^2 + MP^2$

b. Remplacer les longueurs connues dans cette égalité, puis calculer NP^2 et NP.

$NP^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$

donc NP = 1 cm

2 CDE est le triangle rectangle en D représenté ci-dessous.



a. Calculer CE^2.

D'après l'égalité de Pythagore :

$CE^2 = DC^2 + DE^2$.

Donc $CE^2 = 32^2 + 24^2$

$CE^2 = 1\,024 + 576 = 1\,600$

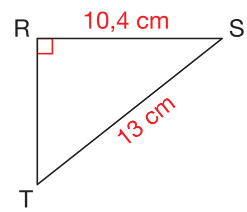
b. En déduire la longueur CE en utilisant éventuellement la touche √ de la calculatrice.

On sait que $40^2 = 1\,600$ donc CE = 40 cm.

On peut aussi utiliser la calculatrice.

★★

3 RST est le triangle rectangle en R représenté ci-contre.



a. Écrire l'égalité de Pythagore pour ce triangle rectangle.

$TS^2 = RS^2 + RT^2$

b. Remplacer les longueurs connues dans cette égalité et en déduire RT^2.

$13^2 = 10{,}4^2 + RT^2$ soit $169 = 108{,}16 + RT^2$

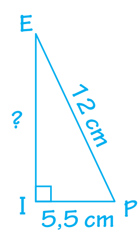
donc $RT^2 = 169 - 108{,}16 = 60{,}84$

c. En déduire RT.

Avec la touche √ on obtient RT = 7,8 cm

4 EPI est un triangle rectangle en I tel que :
IP = 5,5 cm et EP = 12 cm.
Calculer la longueur EI en centimètres et donner la valeur approchée par excès au dixième près.

L'égalité de Pythagore dans ce triangle rectangle s'écrit
$EP^2 = IP^2 + IE^2$
Donc $12^2 = 5{,}5^2 + IE^2$
$144 = 30{,}25 + IE^2$
$IE^2 = 144 - 30{,}25 = 113{,}75$
Avec la calculatrice, on obtient IE ≈ 10,7 cm.



FICHE

60 Caractérisation des triangles rectangles

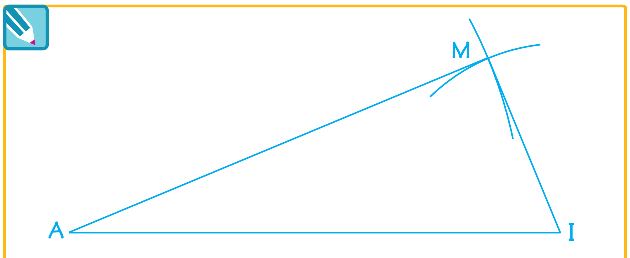
SOCLE

L'égalité de Pythagore est une propriété caractéristique des triangles rectangles :

- si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
- si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

★

1 **a.** Construire un triangle MAI tel que :
MA = 6 cm, AI = 6,5 cm, MI = 2,5 cm.



b. Si ce triangle est rectangle, en quel point peut-il l'être ? Pourquoi ?

L'hypoténuse est le côté le plus long d'un triangle rectangle. Ici, le côté le plus long est [AI] donc si ce triangle est rectangle, il l'est en M.

c. Calculer AI^2 et $MA^2 + MI^2$.

$AI^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$

$MA^2 + MI^2 = 6^2 + 2{,}5^2 = 36 + 6{,}25 = 42{,}25$

d. Que peut-on dire alors du triangle MAI ?

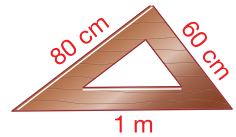
L'égalité de Pythagore $AI^2 = MA^2 + MI^2$ est vérifiée donc le triangle MAI est rectangle en M.

2 PLI est un triangle tel que :
PL = 5 cm, PI = 6 cm, LI = 8 cm
Ce triangle est-il rectangle ?

Le côté le plus long de ce triangle est [LI].
Donc ce triangle ne peut être rectangle qu'en P.
$LI^2 = 8^2 = 64$
$PL^2 + PI^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$
Donc $LI^2 \neq PL^2 + PI^2$.
L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc le triangle PLI n'est pas rectangle.

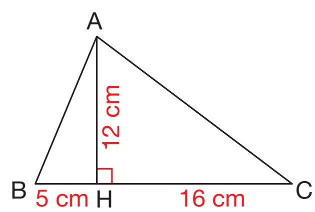
★★

3 Un professeur a fabriqué l'objet ci-contre.
Peut-il s'en servir comme équerre ? Expliquer.



Le côté le plus long est celui de longueur 1 m.
1 m = 100 cm et $100^2 = 10\,000$
$80^2 + 60^2 = 6\,400 + 3\,600 = 10\,000$
Ce triangle vérifie l'égalité de Pythagore
$100^2 = 80^2 + 60^2$ donc il est rectangle.
Le professeur a fabriqué une équerre.

4 Calculer AB et AC, puis dire si le triangle ABC est rectangle.



• L'égalité de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H permet d'écrire :
$$AB^2 = HA^2 + HB^2$$
Donc $AB^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$
Donc AB = 13 cm.

• L'égalité de Pythagore dans le triangle ACH rectangle en H permet d'écrire :
$$AC^2 = HA^2 + HC^2$$
Donc $AC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$
Donc AC = 20 cm.

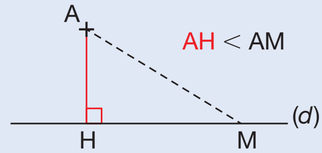
• Le côté le plus long du triangle ABC est [BC] :
BC = 5 cm + 16 cm = 21 cm
$BC^2 = 21^2 = 441$.
$AB^2 + AC^2 = 169 + 400 = 569$
Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$.
Le triangle ABC n'est pas rectangle.

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... **Note** ..... / .....

FICHE

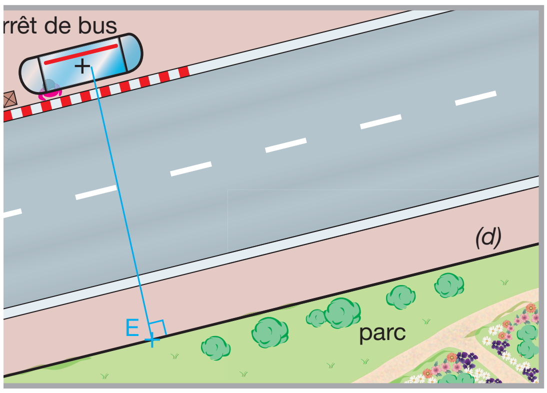
61 Distance d'un point à une droite

La distance d'un point A à une droite (*d*) est la longueur du segment [AH] où H est le pied de la perpendiculaire à (*d*) passant par A.
C'est la plus courte distance de A à un point de (*d*).

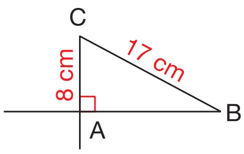


★

1 Avec les instruments de géométrie, placer l'entrée E du parc sur la droite (*d*) pour qu'elle soit la plus proche possible de l'arrêt de bus.

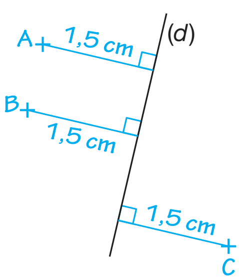


2 Calculer la distance de B à la droite (AC).



Sur cette figure, la distance de B à la droite (AC) est la distance AB.
Dans le triangle ABC rectangle en A, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
Donc $17^2 = AB^2 + 8^2$ *soit* $289 = AB^2 + 64$
$$AB^2 = 289 - 64 = 225$$
Donc $AB = 15$ *cm.*
La distance de B à la droite (AC) est 15 cm.

3 Placer trois points A, B, C non alignés et situés à 1,5 cm de la droite (*d*).

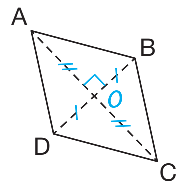


★★

4 ABCD est un losange tel que AC = 5 cm et BD = 3 cm.
Quelle est la distance :

a. de A à la droite (BD) ?

b. de D à la droite (AC) ?

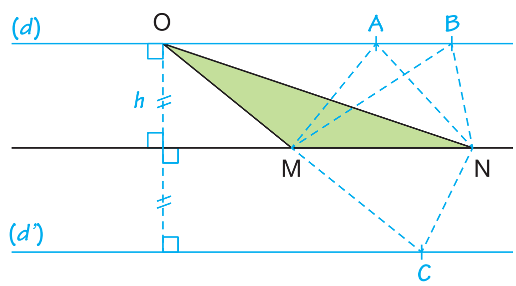


Dans le losange ABCD, les diagonales se coupent en leur milieu O et sont perpendiculaires.

a. *La distance de A à la droite (BD) est donc la distance AO et*
$$AO = \frac{1}{2} \times AC = \frac{1}{2} \times 5 \text{ cm} = 2{,}5 \text{ cm.}$$

b. *La distance de D à la droite (AC) est donc la distance DO et*
$$DO = \frac{1}{2} \times BD = \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ cm.}$$

5 Construire trois points A, B, C non alignés tels que les triangles AMN, BMN, CMN aient la même aire que ce triangle OMN. Expliquer.



Il suffit de placer A, B, C à la même distance de la droite (MN) que le point O c'est-à-dire sur les parallèles (d) et (d') à (MN) tracées ci-dessus.
En notant h la distance de O à (MN), l'aire de ces quatre triangles est $\frac{1}{2} \times h \times MN$.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....

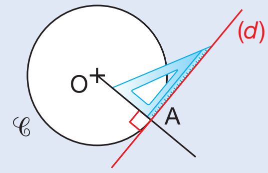
Note ..... / .....

FICHE

62 Tangente à un cercle

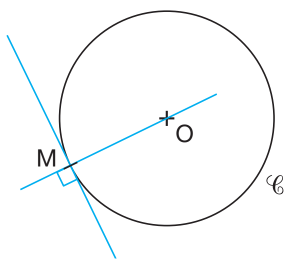
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et A est un point de $\mathscr{C}$.

- La **tangente** au cercle $\mathscr{C}$ en A est la droite (d) perpendiculaire en A à la droite (OA).
- Cette tangente en A n'a que le point A en commun avec le cercle $\mathscr{C}$.

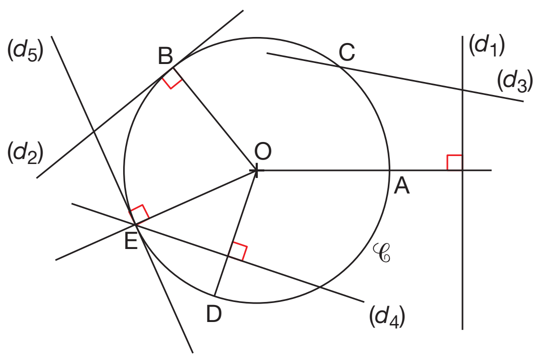


★

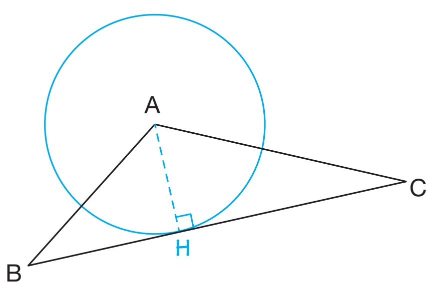
1 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O.
Avec la règle et l'équerre, construire la tangente à $\mathscr{C}$ en son point M.



2 SOCLE Parmi les droites tracées ci-dessous, nommer celles qui sont tangentes au cercle $\mathscr{C}$ de centre O : (d_2) et (d_5)



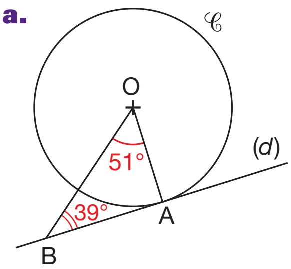
3 Construire le cercle de centre A tangent à la droite (BC).



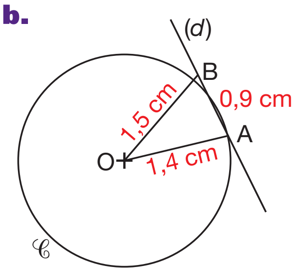
★★

4 Dans chaque cas, dire si la droite (d) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

a.



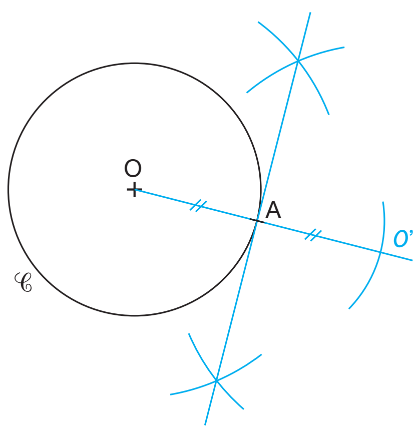
b.



C9_19

a. $39° + 51° = 90°$ donc le triangle AOB est rectangle en A.
La droite (d) est tangente à $\mathscr{C}$ en A.
b. $BO^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$
$AO^2 + AB^2 = 1{,}4^2 + 0{,}9^2 = 1{,}96 + 0{,}81 = 2{,}77$
$BO^2 \neq AO^2 + AB^2$ donc l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée dans OAB, et ce triangle n'est pas rectangle en A.
La droite (d) n'est pas tangente à $\mathscr{C}$ en A.

5 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O.
Avec la règle et le compas, construire :
- le symétrique O' de O par rapport à A ;
- la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A.



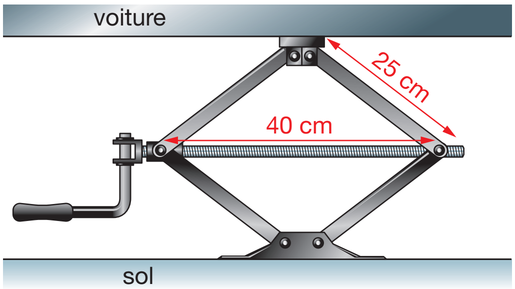
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....
Note ..... / .....

FICHE

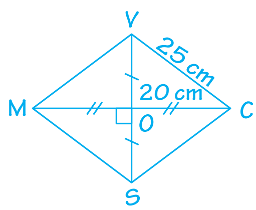
63 Perfectionnement

★★★

1 Un cric de voiture a la forme d'un losange de côté 25 cm.

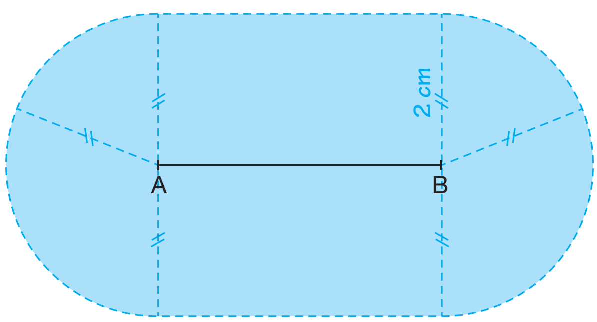


Dans cette position, à quelle hauteur soulève-t-il la voiture ?

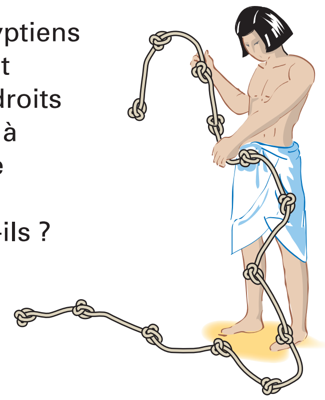


Ce cric peut être assimilé au losange CVMS ci-dessus.
On souhaite donc déterminer la longueur VS.
Les diagonales du losange sont perpendiculaires en leur milieu O, donc le triangle COV est rectangle en O. D'après l'égalité de Pythagore, $CV^2 = OC^2 + OV^2$.
Donc $25^2 = 20^2 + OV^2$ et $625 = 400 + OV^2$.
D'où $OV^2 = 625 - 400 = 225$ et $OV = 15$ cm.
Donc $VS = 2 \times OV = 2 \times 15$ cm $= 30$ cm.
Dans cette position, le cric soulève la voiture de 30 cm.

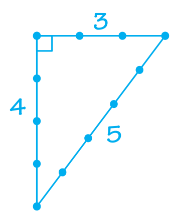
2 Colorer l'ensemble des points qui sont à moins de 2 cm du segment [AB].



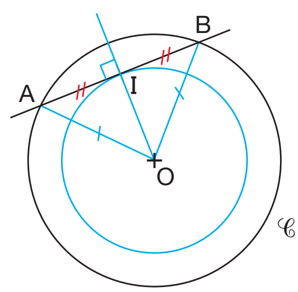
3 Les arpenteurs égyptiens (2000 av. J.-C.) savaient construire des angles droits au moyen d'une corde à 13 nœuds comme celle représentée ci-contre. Comment procédaient-ils ?



Les Égyptiens connaissaient le célèbre triangle rectangle 3, 4, 5. En effet :
$5^2 = 25$
et $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
donc l'égalité de Pythagore est bien vérifiée, il est rectangle.



4 A et B sont deux points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
I est le milieu du segment [AB].
Expliquer pourquoi la droite (AB) est tangente au cercle de centre O et de rayon OI.



[OA] et [OB] sont deux rayons du cercle $\mathscr{C}$.
Le triangle OAB est isocèle en O car OA = OB.
Dans ce triangle isocèle, le milieu I de [AB] est aussi le pied de la hauteur issue de O.
Donc les droites (AB) et (OI) sont perpendiculaires en I.
Donc (AB) est tangente en I au cercle de centre O et de rayon OI.

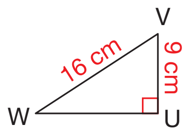
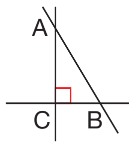
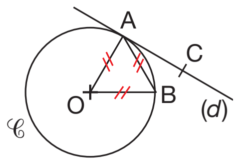
FICHE 64

QCM et jeux

QCM

Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

Note ..... / 5

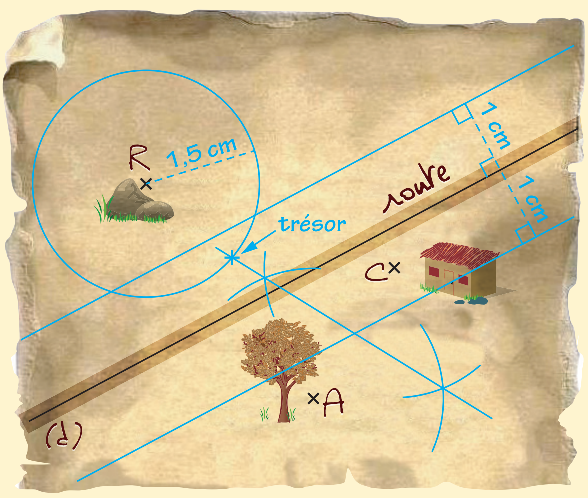
A	La valeur approchée par défaut au dixième près de la longueur UW est… 	13,3 cm	13,23 cm	13,2 cm
B	La longueur de la diagonale d'un rectangle de dimensions 12 m et 35 m est...	37 m	136,9 m	47 m
C	GHI est un triangle tel que GH = 16,9 cm, HI = 12 cm, GI = 11,9 cm. Alors le triangle GHI...	est rectangle en I	est rectangle en H	n'est pas rectangle
D	Sur cette figure, on peut affirmer que... 	CB est la distance de C à la droite (AB)	AC est la distance de A à la droite (BC)	BC est la distance de B à la droite (AC)
E	C est un point de la tangente (d) au cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Alors... 	$\widehat{BAC} = 30°$	$\widehat{OAC} = 90°$	$\widehat{ABO} = 60°$

jeu 1

Ce plan est à l'échelle 1/10 000.
Un trésor est caché :

- à moins de 100 m de la route (d),
- à 150 m du rocher R,
- à égale distance de l'arbre A et de la cabane C.

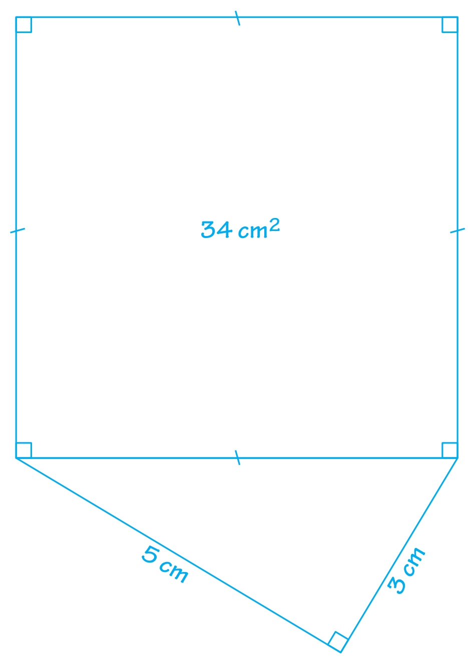
Indiquer sur le plan où est situé le trésor.



jeu 2

Construire un carré d'aire 34 cm².

On remarque que $34 = 9 + 25 = 3^2 + 5^2$.
On trace un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 5 cm et 3 cm.



Chapitre 10

Triangle : milieux et parallèles

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

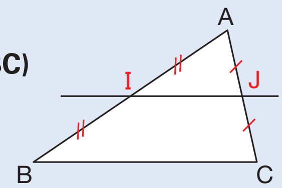
65 Triangle : milieux de deux côtés

SOCLE

Dans un triangle :
- la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté,
- la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

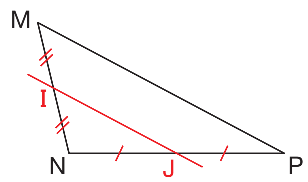
(IJ) // (BC)

$IJ = \frac{BC}{2}$



★

1 Compléter.



- I est le ..*milieu*....

du segment [MN],

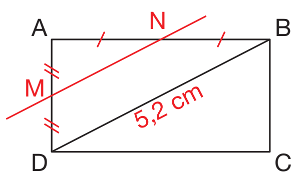
- J est le milieu

du ..*segment [NP]*...

Or, la droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est .*parallèle au troisième côté*....

Donc les droites (IJ) et .*(MP) sont parallèles*..........

2



a. Citer une droite de cette figure qui est parallèle à la droite (MN). Expliquer.

b. Quelle est la longueur MN ?

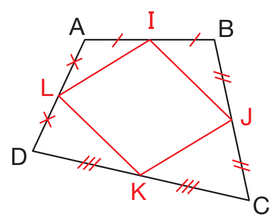
a. Dans le triangle ABD, M est le milieu de [AD] et N est le milieu de [AB].
Donc la droite (MN) est parallèle au troisième côté.
Donc les droites (MN) et (BD) sont parallèles.

b. Dans le triangle ABD, le segment [MN] joint les milieux de deux côtés, donc sa longueur est la moitié de celle du troisième côté.

$MN = \frac{BD}{2} = \frac{5{,}2\text{ cm}}{2} = 2{,}6\text{ cm}$

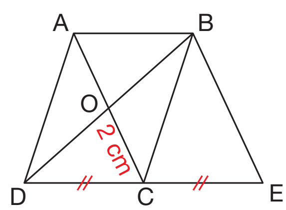
★★

3 Avec les données de cette figure, déterminer la nature du quadrilatère IJKL.



- *Dans le triangle ABC, le segment [IJ] joint les milieux des côtés [AB] et [BC].*
Donc les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
- *On montre de même que les droites (LK) et (AC) sont parallèles.*
- *Donc les droites (IJ) et (LK) sont parallèles.*
- *On montre de même que les droites (IL) et (JK) sont parallèles (car parallèles à (BD)).*
- *Le quadrilatère IJKL a ses côtés deux à deux parallèles, donc c'est un parallélogramme.*

4 ABCD est un parallélogramme de centre O et C est le milieu de [DE]. Déterminer la longueur BE.



Les diagonales du parallélogramme ABCD se coupent en leur milieu O.
C est le milieu de [DE].
Donc dans le triangle BDE, le segment [OC] joint les milieux de deux côtés.
La longueur du côté [BE] est donc le double de celle de [OC].
BE = 2 × OC = 2 × 2 cm = 4 cm

CALCUL MENTAL	• .... • .... • .... • .... •	Note
	• .... • .... • .... • .... •	..... / .....

FICHE

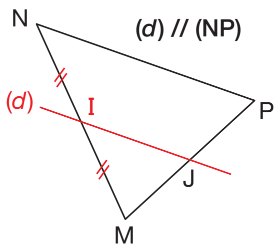
66 Triangle : un milieu et une parallèle

SOCLE

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

★

1 Compléter.



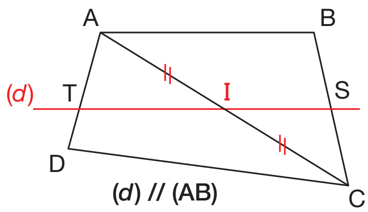
• I est le milieu du segment [MN],

• la droite (IJ) est parallèle à la droite (NP).

Or, la droite qui passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre côté d'un triangle, passe par le milieu du troisième côté.

Donc la droite (IJ) coupe le côté [MP] en son milieu J.

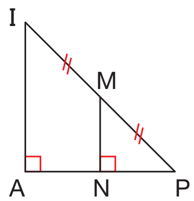
2



a. Avec les données de cette figure, Sébastien affirme : « T est le milieu de [AD] ». Corriger son erreur.

La droite (*d*) passe par le milieu I du segment [AC] et elle est parallèle à (AB) (et non à (CD)).
Donc, dans le triangle ABC, on peut en déduire que S est le milieu de [BC].

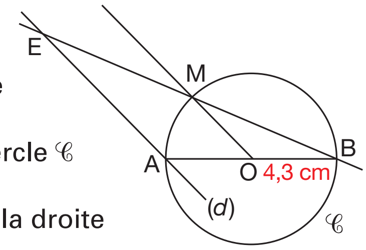
3 D'après les données de cette figure, que peut-on déduire pour le point N ?



Les droites (MN) et (AI) sont perpendiculaires à la droite (AP), donc (MN) est parallèle à (AI).
(MN) passe par le milieu de [IP].
Donc (MN) coupe [AP] en son milieu N.

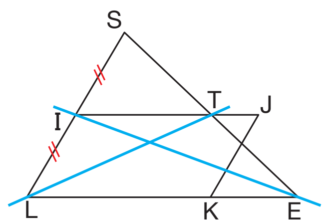
★★

4 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 4,3 cm. [AB] est un diamètre de $\mathscr{C}$. M est un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct de A et B. (*d*) est la parallèle à la droite (OM) passant par A. Elle coupe la droite (BM) en E. Calculer la longueur AE.



Le centre O du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu du diamètre [AB].
Donc, dans le triangle ABE, la droite (OM) passe par le milieu O de [AB] et est parallèle à (AE).
Donc la droite (OM) coupe le côté [BE] en son milieu M.
Le segment [OM] joint donc les milieux de deux côtés du triangle ABE. Donc, sa longueur est la moitié de celle du troisième côté [AE].
Or M appartient au cercle $\mathscr{C}$ donc OM = 4,3 cm.
Donc AE = 2 × 4,3 cm = 8,6 cm.

5 IJKL est un parallélogramme. S est le point tel que I soit le milieu de [SL]. E est un point de (KL). La droite (SE) coupe [IJ] en T. Construire deux médianes du triangle SEL avec la règle non graduée. Expliquer.



L'une des médianes du triangle SEL est (EI).
Dans le parallélogramme IJKL, les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.
Dans le triangle SEL, la droite (IJ) passe par le milieu I de [SL] et est parallèle à (LE), donc elle coupe [SE] en son milieu T.
Donc (LT) est une deuxième médiane du triangle SEL.

CALCUL MENTAL
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
Note ..... / .....

FICHE

67 Utiliser un logiciel de géométrie

★

1 **1.** Avec un logiciel de géométrie :

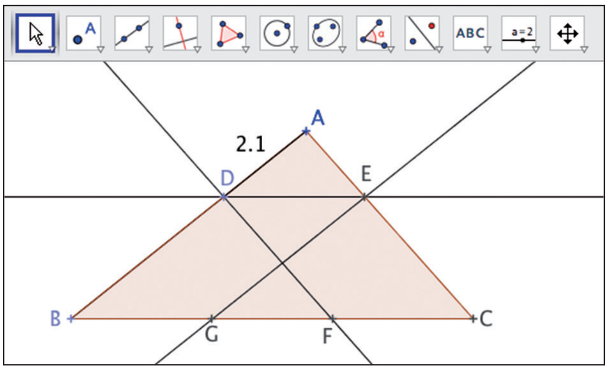
a. tracer un triangle ABC tel que :
AB = 6 cm, AC = 5 cm et BC = 8 cm,

b. placer un point D qui appartient à [AB], afficher la longueur AD,

c. tracer la parallèle à (BC) passant par D, noter E son point d'intersection avec [AC],

d. tracer la parallèle à (AC) passant par D, noter F son point d'intersection avec [BC],

e. tracer la parallèle à (AB) passant par E, noter G son point d'intersection avec [BC].



2. Déplacer le point D et conjecturer pour quelle longueur AD, les points F et G sont confondus.

Il semble que F et G sont confondus pour AD = 3 cm

c'est-à-dire lorsque D est le milieu de [AB].

3. Démontrer cette conjecture.

Lorsque D est le milieu de [AB], dans le triangle ABC :

• la droite (DE) passe par D et est parallèle à (BC), donc elle coupe le côté [AC] en son milieu E,

• la droite (DF) passe par D et est parallèle à (AC), donc elle coupe le côté [BC] en son milieu F,

• la droite (EG) passe par E, le milieu de [AC], et est parallèle à (AB), donc elle coupe le côté [BC] en son milieu G.
Ainsi F et G sont le milieu de [BC] donc F et G sont confondus.

★★

2 **1.** Avec un logiciel de géométrie :

a. créer un triangle ABC,

b. placer le milieu D du côté [AB],

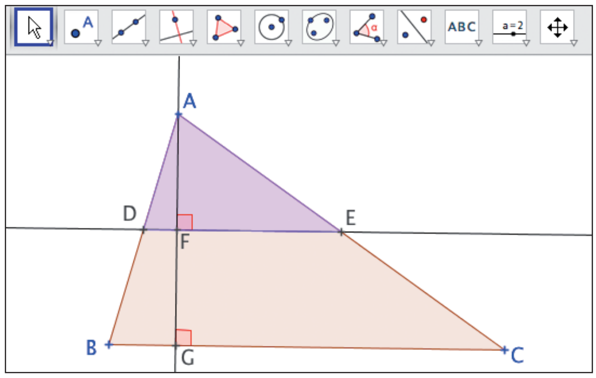
c. tracer la parallèle à (BC) passant par D et placer son point d'intersection E avec [AC],

d. tracer la perpendiculaire à (BC) passant par A et placer ses points d'intersection F avec [DE] et G avec [BC]. Créer le triangle ADE,

e. dans la zone de saisie, entrer :
"AireADE/AireABC="+Aire[poly2]/Aire[poly1] ,

f. déplacer les points A, B, C et observer le quotient affiché. Que peut-on conjecturer ?

Il semble que ce quotient est égal à 0,25.



2. Démontrer cette conjecture dans le cas où :
BC = 9 cm, BG = 2 cm, AG = 6 cm et AD = 3 cm.

• Aire $\mathcal{A}_1$ du triangle ABC :
$$\mathcal{A}_1 = \frac{BC \times AG}{2} = \frac{9\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2} = 27\text{ cm}^2.$$

• Dans le triangle ABC, la droite (DE) passe par le milieu D de [AB] et est parallèle à (BC). Donc, cette droite coupe le 3ᵉ côté [AC] en son milieu E. Le segment [DE] joint les milieux de deux côtés,
donc $DE = \frac{BC}{2} = \frac{9\text{ cm}}{2} = 4{,}5\text{ cm}.$

• Dans le triangle ABG, la droite (DE) coupe [AG] en son milieu F. Donc $AF = \frac{AG}{2} = \frac{6\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}.$

• Aire $\mathcal{A}_2$ du triangle ADE :
$$\mathcal{A}_2 = \frac{DE \times AF}{2} = \frac{4{,}5\text{ cm} \times 3\text{ cm}}{2} = 6{,}75\text{ cm}^2.$$

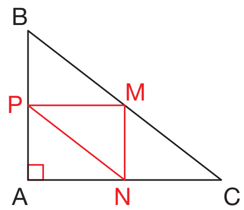
• $q = \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} = \frac{6{,}75}{27} = 0{,}25.$

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note
● .... ● .... ● .... ● .... ● .... / .....

FICHE
68 Perfectionnement

★★★

1 ABC est un triangle rectangle en A tel que :
AB = 3,9 cm et AC = 5,2 cm.



a. Calculer la longueur de l'hypoténuse [BC].

b. M, N, P sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC], [AB].
Calculer le périmètre du triangle MNP.

a. Dans le triangle ABC rectangle en A, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 3{,}9^2 + 5{,}2^2$$

Ainsi $BC^2 = 42{,}25$ et $BC = 6{,}5$ cm.

b. • Le segment [MN] joint les milieux de deux côtés du triangle ABC, donc sa longueur est la moitié de celle du troisième côté [AB].

Donc $MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3{,}9 \text{ cm}}{2} = 1{,}95 \text{ cm}$.

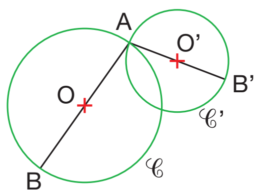
• On établit de même que :

$$MP = \frac{AC}{2} = \frac{5{,}2 \text{ cm}}{2} = 2{,}6 \text{ cm}$$

$$NP = \frac{BC}{2} = \frac{6{,}5 \text{ cm}}{2} = 3{,}25 \text{ cm}$$

• 1,95 cm + 2,6 cm + 3,25 cm = 7,8 cm.
• Donc le périmètre de MNP est 7,8 cm.

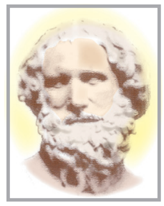
2 $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles sécants de centres respectifs O et O'.
[AB] et [AB'] sont des diamètres respectifs de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

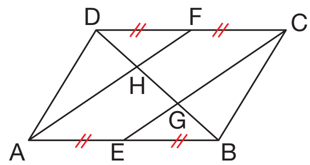


Que peut-on dire des droites (OO') et (BB') ? Justifier.

Le centre O est le milieu du diamètre [AB] et le centre O' est le milieu du diamètre [AB'].
Dans le triangle ABB', la droite (OO') passe par les milieux de deux côtés, donc elle est parallèle au troisième côté.
Donc les droites (OO') et (BB') sont parallèles.

3 Le mathématicien grec Euclide (III^e siècle avant J.-C.) affirmait que dans un parallélogramme tel que celui-ci, « *la diagonale [BD] est divisée en trois parties égales* ».





On se propose d'établir cette propriété en considérant les droites parallèles (AF) et (CE).

1. Dans chaque cas, choisir un triangle de cette figure pour démontrer que :

a. H est le milieu de [DG],

b. G est le milieu de [BH].

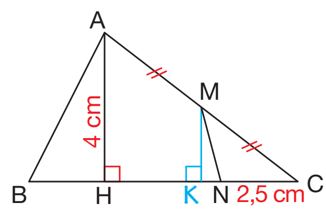
2. En déduire que DH = HG = GB.

1. a. Dans le triangle CDG, la droite (FA) passe par le milieu F du côté [CD] et est parallèle au côté [CG]. Donc cette droite coupe le troisième côté [DG] en son milieu H.

b. Dans le triangle ABH, la droite (CE) passe par le milieu E du côté [AB] et est parallèle au côté [AH]. Donc cette droite coupe le troisième côté [BH] en son milieu G.

2. De **1. a.** on déduit que DH = HG et de **1. b.** on déduit que HG = GB.
Donc DH = HG = GB.

4 Avec les données de cette figure, calculer l'aire du triangle MNC.



On trace la hauteur [MK] du triangle MNC.
Dans le triangle ACH, la droite (MK) passe par le milieu M de [AC] et est parallèle au côté [AH].
Donc K est le milieu du 3^e côté [CH].

$$MK = \frac{AH}{2} = \frac{4 \text{ cm}}{2} = 2 \text{ cm}.$$

Aire du triangle MNC :

$$\frac{MK \times NC}{2} = \frac{2 \text{ cm} \times 2{,}5 \text{ cm}}{2} = 2{,}5 \text{ cm}^2.$$

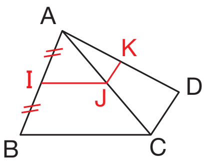
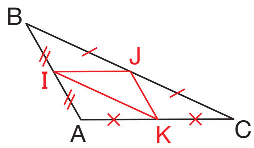
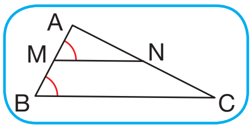
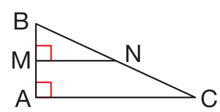
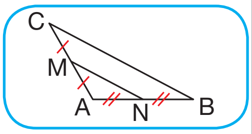
FICHE 69

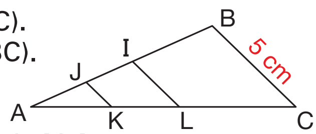
QCM et jeux

QCM

Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

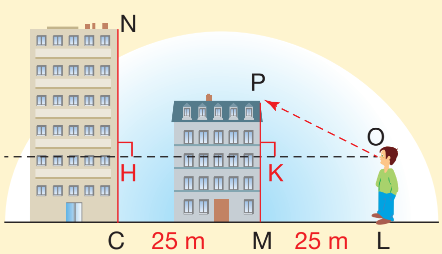
Note ..... / 5

A	Dans un triangle ABC, les points M et N sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC]. Donc…	(MN) // (BC) et BC = 2 × MN	(MN) // (AC) et AC = 2 × MN	(MN) // (AC) et MN = 2 × AC
B	Sur cette figure : (IJ) // (BC) et (JK) // (CD). Alors on peut affirmer… 	(IK) // (BD)	K milieu de [AD]	J milieu de [AC]
C	AB = 4 cm AC = 4,5 cm BC = 6 cm Alors, le périmètre du triangle IJK est… 	29 cm	14,5 cm	7,25 cm
D	Les droites (MN) et (BC) sont parallèles sur la(les) figure(s)…			

E	(IL) // (BC).
	(JK) // (BC).
	I milieu de [AB].
	J milieu de [AI].
	Alors… 
		$JK = \frac{IL}{2}$	JK = 1,25 cm	$JK = \frac{BC}{2}$

jeu 1

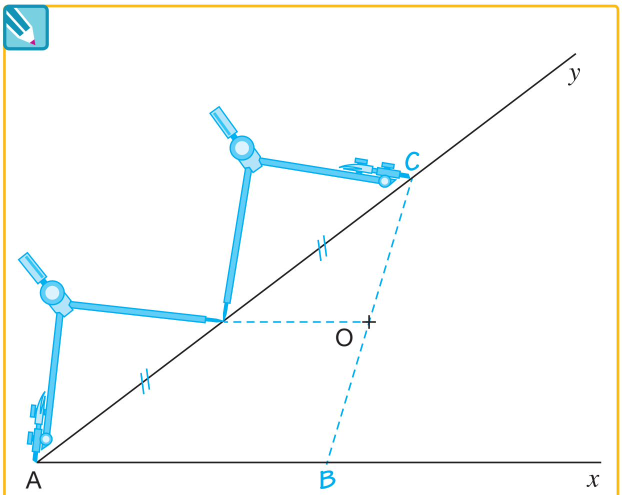
Dans une rue rectiligne, deux immeubles en C et en M ont pour hauteurs 45 m et 30 m ; ils sont séparés de 25 m.
Lucas mesure 1,80 m ; il est placé en un point L de cette rue de façon que M soit le milieu de [LC]. Lucas voit-il le haut de l'immeuble ?



On note R le point d'intersection des droites (OP) et (CN). Alors HR = 2 × PK.
Or PK = 30 m – 1,80 m = 28,2 m
donc HR = 2 × 28,2 m = 56,4 m
Or HN = 45 m – 1,80 m = 43,2 m
Donc HN < HR et le point N est situé au-dessous de R.
Ainsi Lucas ne voit pas le haut de l'immeuble en C.

jeu 2

Le point O est le milieu d'un segment [BC] avec B point de la demi-droite [Ax) et C point de la demi-droite [Ay). Mais les points B et C ont été effacés. Proposer une construction pour retrouver B et C avec les instruments de géométrie.



Triangles et cercles

Chapitre 11

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

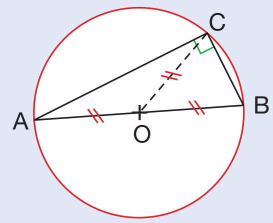
FICHE

70 Cercle circonscrit à un triangle rectangle

● **Si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse.**
Le cercle circonscrit au triangle rectangle ABC a pour centre le milieu O de son hypoténuse.

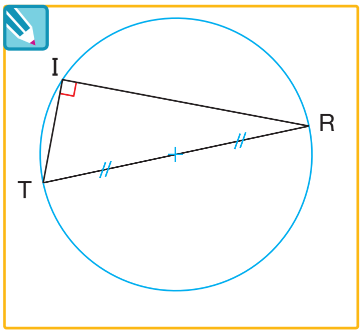
● Si $\widehat{ACB}$ est un angle droit, alors le point C appartient au cercle de diamètre [AB].

● Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.



★

1 TRI est un triangle rectangle en I, tel que :
- TI = 1,4 cm ;
- TR = 3,6 cm.



1. On se propose de construire le cercle circonscrit au triangle TRI.

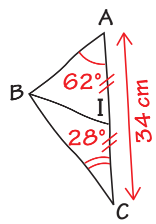
a. Quel est son diamètre ? L'hypoténuse [TR] ....

b. Quel est son centre ? Le milieu de [TR] ....

c. Quel est son rayon ? $\frac{3{,}6\text{ cm}}{2} = 1{,}8\text{ cm}$ ...

2. Construire le cercle circonscrit au triangle TRI.

2 **1. a.** D'après les codages sur cette figure à main levée, quelle est la nature du triangle ABC ci-contre ? Justifier.



$\widehat{ABC} = 180° - (62° + 28°) = 90°$ ....

donc le triangle ABC est rectangle en B. ....

b. En déduire la longueur BI.

[BI] est la médiane relative à l'hypoténuse. ....

$BI = \frac{AC}{2} = \frac{34\text{ cm}}{2} = 17\text{ cm}$ ....

2. Citer les triangles isocèles de la figure.

Les triangles AIB et BIC sont isocèles en I. ....

....

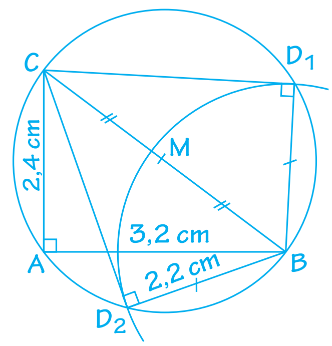
★★

3 **a.** Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3,2 cm et AC = 2,4 cm.

b. Construire le cercle circonscrit au triangle ABC, après avoir précisé son centre et calculé son rayon.

c. Placer un point D tel que $\widehat{CDB}$ soit un angle droit et que BD = 2,2 cm. Expliquer.

a.



b. Le cercle circonscrit au triangle rectangle ABC a pour diamètre son hypoténuse [BC], donc son centre est le milieu M de [BC].
L'égalité de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A permet d'écrire: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Soit $BC^2 = 3{,}2^2 + 2{,}4^2 = 16$. Donc BC = 4 cm.
$MB = \frac{4\text{ cm}}{2} = 2\text{ cm}$ donc le rayon est 2 cm.

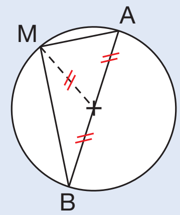
c. L'angle $\widehat{CDB}$ est un angle droit, donc le point D appartient au cercle de diamètre [BC].
On trouve deux points D (notés D_1 et D_2 ci-dessus) du cercle tels que BD = 2,2 cm.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
Note ..... / .....

FICHE

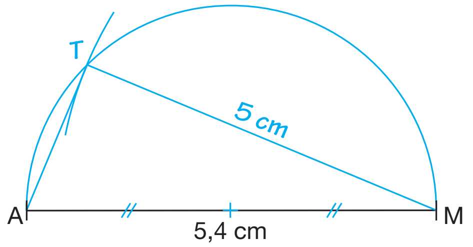
71 Triangle inscrit dans un cercle de diamètre donné

- **Si un triangle est inscrit dans un cercle (ou demi-cercle) de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle.**
- Si un point M, distinct de A et de B, appartient à un cercle de diamètre [AB], alors l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle droit.
- Si dans un triangle, la longueur d'une médiane est égale à la moitié de la longueur du côté correspondant, alors ce triangle est rectangle.



★

1 [AM] est un segment de longueur 5,4 cm.



a. Tracer un demi-cercle de diamètre [AM].

b. Placer le point T de ce demi-cercle tel que MT = 5 cm.

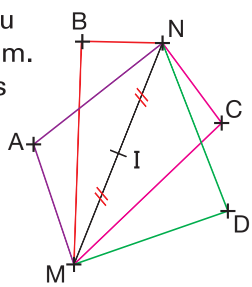
c. Que peut-on dire du triangle TAM pour ce demi-cercle ?

Il est inscrit dans le demi-cercle. ....

d. En déduire la nature du triangle TAM.

Le triangle TAM est rectangle en T. ....

2 Ci-contre, I est le milieu du segment [MN] mesurant 3,2 cm.
A, B, C et D sont quatre points tels que :
IA = 1,1 cm ; IB = 1,6 cm ;
IC = 1,4 cm et ID = 1,6 cm.



a. Calculer la moitié de MN.

3,2 cm : 2 = 1,6 cm ....

b. En déduire quel(s) triangle(s) est (sont) rectangle(s).

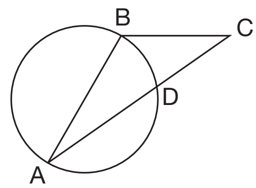
Les triangles BMN et DMN sont rectangles respectivement .

en B et en D car IB = $\frac{MN}{2}$ = 1,6 cm ....

et ID = $\frac{MN}{2}$ = 1,6 cm. ....

★★

3 ABC est le triangle ci-contre.
Le cercle de diamètre [AB] recoupe le côté [AC] en D.



a. Pourquoi l'angle $\widehat{ADB}$ est-il un angle droit ?

b. En déduire le rôle de la droite (BD) pour le triangle ABC.

a. Le point D appartient au cercle de diamètre [AB], donc $\widehat{ADB}$ est un angle droit.

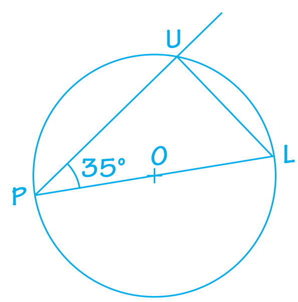
b. Comme l'angle $\widehat{ADB}$ est un angle droit, la droite (BD) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

4 **1. a.** Tracer un cercle de centre O et de rayon 1,6 cm. Tracer un diamètre [PL] de ce cercle.

b. Placer un point U du cercle tel que $\widehat{UPL}$ = 35°.

2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ULP}$. Justifier.

1.



2. Le point U appartient au cercle de diamètre [PL] donc le triangle PUL est rectangle en U.
Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires donc $\widehat{ULP}$ = 90° − 35° = 55°.

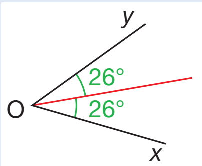
CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

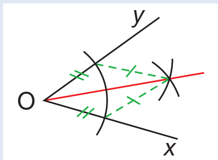
72 Bissectrice d'un angle

- La **bissectrice d'un angle** est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

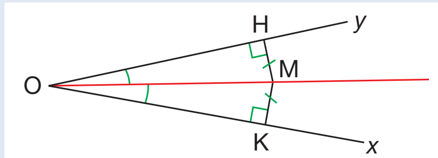
- **Construction**
  - avec le rapporteur



  - avec le compas



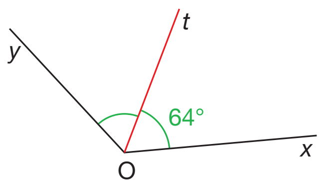
- **Propriété caractéristique**
  - Si un point est à égale distance des deux côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.
  - Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est à égale distance des deux côtés de cet angle.



★

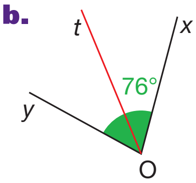
1 SOCLE Dans chaque cas, la demi-droite [Ot) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.
Calculer la mesure de l'angle indiqué.

a.



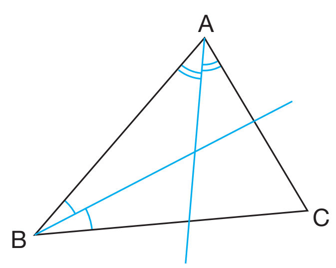
$\widehat{xOy}$ = 64° × 2 = 128°

b.

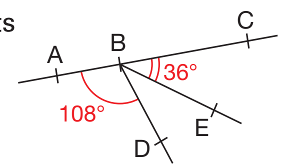


$\widehat{xOt}$ = 76° : 2 = 38°

2 Construire pour ce triangle ABC les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CAB}$.



3 SOCLE Ci-contre, les points A, B et C sont alignés.



a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DBE}$.

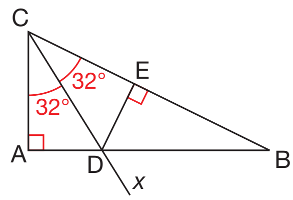
$\widehat{DBE}$ = 180° − (108° + 36°) = 36°.

b. En déduire le rôle de la demi-droite [BE) pour l'angle $\widehat{DBC}$.

$\widehat{DBE} = \widehat{EBC}$ = 36° donc la demi-droite [BE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DBC}$.

★★

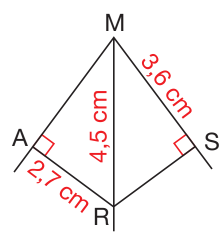
4 ABC est un triangle rectangle en A.
La demi-droite [Cx) coupe le côté [AB] en D.
Le point E appartient au segment [BC].
D'après les codages de la figure, que peut-on dire des longueurs DA et DE ? Expliquer.



$\widehat{ACx} = \widehat{xCB}$ = 32° donc la demi-droite [Cx) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.
Le point D appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, donc il est à égale distance des deux côtés de cet angle.
Donc DA = DE.

5 **a.** Avec les données de la figure, calculer la longueur SR.

b. En déduire que le point R appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AMS}$.



a. Le triangle MRS est rectangle en S.
D'après l'égalité de Pythagore :
$$MR^2 = SM^2 + SR^2$$
Ainsi $4{,}5^2 = 3{,}6^2 + SR^2$ et $SR^2 = 20{,}25 - 12{,}96$.
Donc $SR^2 = 7{,}29$ et SR = 2,7 cm.
b. RA = 2,7 cm et RS = 2,7 cm donc RA = RS.
Le point R est donc à égale distance des deux côtés de l'angle $\widehat{AMS}$, donc il appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AMS}$.

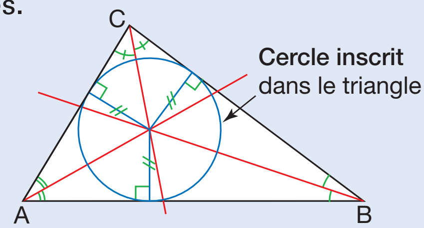
CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....

Note ..... / .....

FICHE

73 Bissectrices et cercle inscrit

● Les **bissectrices** des angles d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est à égale distance des trois côtés du triangle.
Il est le centre du **cercle inscrit** dans ce triangle.

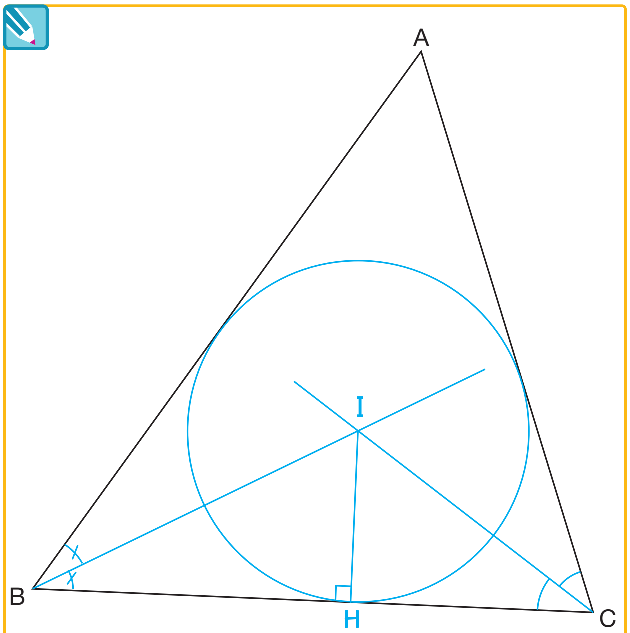


★

1 **1. a.** Construire les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Noter I leur point d'intersection.

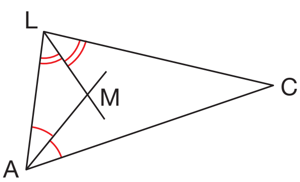
b. Placer le point H, pied de la hauteur issue de I dans le triangle IBC.

c. Tracer le cercle de centre I et de rayon IH.



2. Compléter : le point I est le centre du ..... cercle inscrit .... dans le triangle ABC.

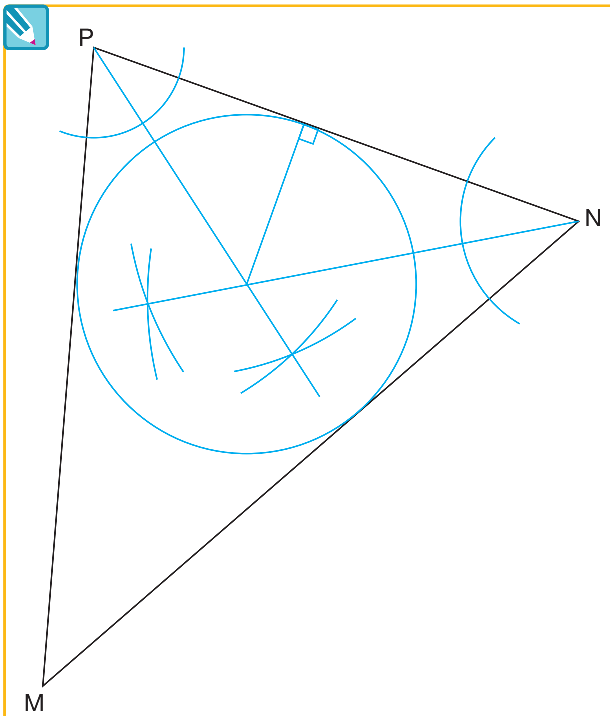
2 Que représente la demi-droite [CM) pour le triangle LAC ci-contre ? Expliquer.



M est le point d'intersection des bissectrices de deux angles du triangle LAC, donc il appartient aussi à la bissectrice du 3e angle.
[CM) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{LCA}$.

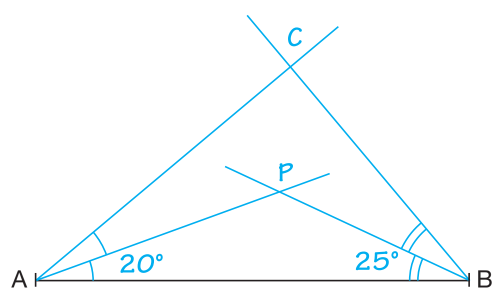
★★

3 Construire avec la règle, le compas et l'équerre, le cercle inscrit dans le triangle MNP.



4 **a.** Placer ci-dessous un point P tel que :
$\widehat{ABP} = 25°$ et $\widehat{BAP} = 20°$

b. Construire le point C tel que P soit le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.



CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....
Note ..... / .....

FICHE

74 Utiliser un logiciel de géométrie

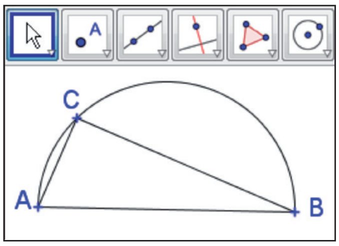
★

1 Avec un logiciel de géométrie,

1. a. tracer un segment [AB] de longueur 8 cm,

b. tracer un demi-cercle de diamètre [AB] (utiliser Demi-cercle, cliquer sur A puis sur B),

c. placer un point C sur le demi-cercle et tracer les segments [CA] et [CB].



2. Afficher la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$. Déplacer le point C sur le demi-cercle. Que remarque-t-on pour l'angle $\widehat{ACB}$? Est-ce surprenant ?

L'angle $\widehat{ACB}$ mesure 90° quelle que soit la position du point C sur le demi-cercle, sauf si C est confondu avec A ou B (angle $\widehat{ACB}$ non défini).

On sait que si un point C appartient à un cercle de diamètre [AB], alors l'angle $\widehat{ACB}$ est un angle droit.

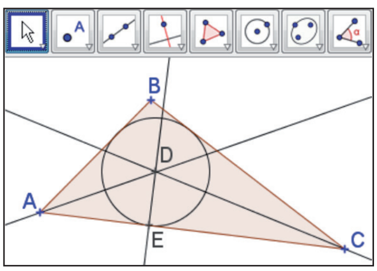
Ce n'est donc pas surprenant.

2 **1.** Avec un logiciel de géométrie,

a. tracer un triangle ABC, puis tracer les bissectrices de deux angles du triangle (utiliser Bissectrice). Nommer D leur point d'intersection,

b. tracer la perpendiculaire à la droite (AC) et passant par D. Elle coupe [AC] en E,

c. tracer le cercle de centre D et passant par E.



2. Quel est ce cercle ?

C'est le cercle inscrit dans le triangle ABC.

★★

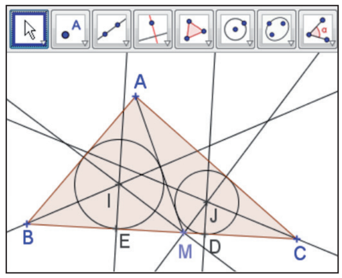
3 Avec un logiciel de géométrie,

1. a. tracer un triangle ABC, puis placer un point M du côté [BC],

b. construire les cercles inscrits dans les triangles AMB et AMC, de centres I et J respectivement,

c. afficher la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$.

2. Déplacer le point M sur le côté [BC]. Que remarque-t-on ? Comment l'expliquer ?



Les demi-droites [MI) et [MJ) semblent perpendiculaires.

Elles sont les bissectrices des angles $\widehat{BMA}$ et $\widehat{AMC}$ donc :

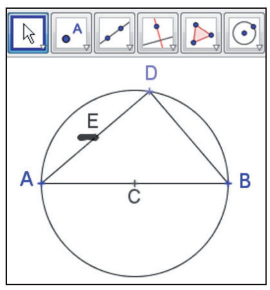
$$\widehat{IMJ} = \widehat{IMA} + \widehat{AMJ} = \frac{\widehat{BMA}}{2} + \frac{\widehat{AMC}}{2} = \frac{\widehat{BMA} + \widehat{AMC}}{2}$$

d'où $\widehat{IMJ} = \dfrac{180°}{2} = 90°.$

4 Avec un logiciel de géométrie,

1. a. tracer un segment [AB], puis construire le cercle de diamètre [AB],

b. sur ce cercle, placer un point D, puis tracer les segments [DA] et [DB]. Créer le milieu E de [AD].



2. Déplacer le point D sur le cercle et observer le point E (faire un clic droit et activer la trace du point E). Que peut-on remarquer ? Expliquer.

E semble se déplacer sur le cercle de diamètre [AC].

Dans le triangle ADB, E est le milieu de [AD] et C est le milieu de [AB], donc les droites (EC) et (BD) sont parallèles.

D appartient au cercle de diamètre [AB] donc l'angle $\widehat{ADB}$ est droit. Donc l'angle $\widehat{AEC}$ est droit et E appartient au cercle de diamètre [AC].

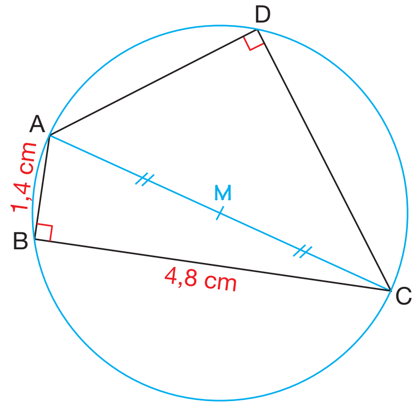
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE 75

Perfectionnement

★★★

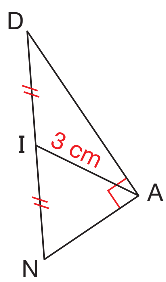
1 Le quadrilatère ABCD ci-dessous est tel que : AB = 1,4 cm ; BC = 4,8 cm ; $\widehat{ABC} = 90°$; $\widehat{ADC} = 90°$.
Amélie affirme : « Je peux tracer un cercle qui passe par les quatre points A, B, C, D ».
A-t-elle raison ?
Si oui, tracer ce cercle en indiquant son centre et en calculant son rayon R.
Si non, expliquer pourquoi.



Le triangle ABC est rectangle en B donc son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse [AC] et pour centre, le milieu M de [AC].
Ce cercle passe aussi par le point D car le triangle ADC est rectangle en D et a la même hypoténuse [AC].
Les deux triangles ABC et ADC ont le même cercle circonscrit. Amélie a raison.

Rayon de ce cercle :
L'égalité de Pythagore dans le triangle rectangle ABC permet d'écrire :
$AC^2 = BA^2 + BC^2$.
$AC^2 = 1{,}4^2 + 4{,}8^2$ soit $AC^2 = 1{,}96 + 23{,}04$
$AC^2 = 25$ d'où $AC = 5$ cm.
Rayon : $R = 5$ cm : $2 = 2{,}5$ cm.

2 Avec les données de la figure, déterminer la longueur DN.



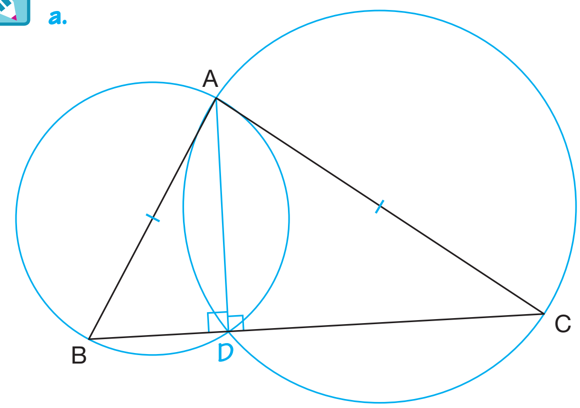
Dans le triangle rectangle DAN, [AI] est la médiane relative à l'hypoténuse.
Donc $AI = \frac{DN}{2}$.
$DN = 2 \times AI = 2 \times 3$ cm $= 6$ cm.

3 **a.** Sur la figure ci-dessous, construire le cercle de diamètre [AB] et le cercle de diamètre [AC]. Noter D le 2e point d'intersection des deux cercles.

b. Quelle est la nature du triangle ABD ? du triangle ADC ? Justifier.

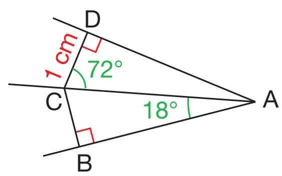
c. En déduire que D appartient au segment [BC].

a.



b. Le point D appartient au cercle de diamètre [AB], donc le triangle ABD est rectangle en D.
De même le triangle ADC est rectangle en D.
c. $\widehat{BDC} = \widehat{BDA} + \widehat{ADC} = 90° + 90° = 180°$
donc les points B, D, C sont alignés et le point D appartient au segment [BC].

4 **a.** Avec les données de la figure, montrer que la demi-droite [AC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$.



b. En déduire la distance de C à la droite (AB).

a. Dans le triangle ACD, rectangle en D,
$\widehat{CAD} = 90° - 72° = 18°$.
$\widehat{DAC} = \widehat{CAB} = 18°$ *donc la demi-droite [AC) est la bissectrice de l'angle* $\widehat{BAD}$.
b. La distance de C à la droite (AB) est la longueur BC.
Comme le point C appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$*, il est à égale distance des deux côtés de cet angle.*
Donc BC = CD = 1 cm.

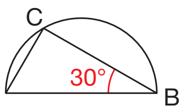
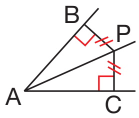
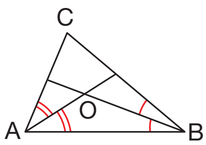
FICHE 76

QCM et jeux

QCM

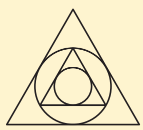
Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

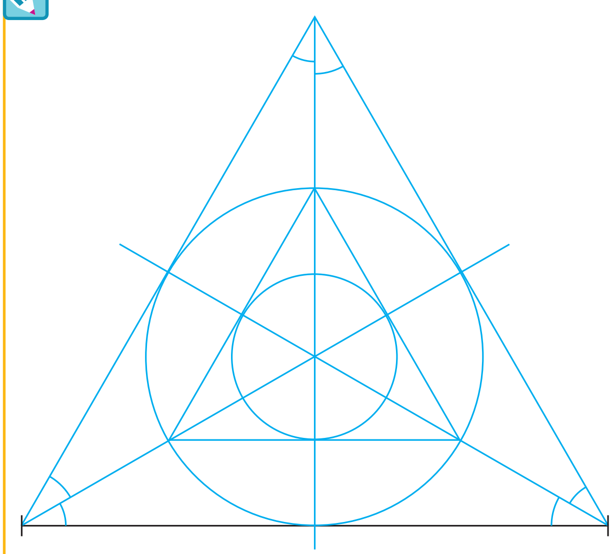
Note ..... / 5

A	Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est…	le milieu de l'hypoténuse	le point d'intersection des médiatrices de ses côtés	le point d'intersection des bissectrices de ses angles
B	Sur la figure ci-contre, A et B sont deux points diamétralement opposés, et C appartient au demi-cercle. Alors… 	on ne peut pas connaître la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$	$\widehat{CAB} = 45°$	$\widehat{CAB} = 60°$
C	Avec les données de cette figure, on peut affirmer que… 	[AP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$	(AP) est la médiatrice de [BC]	[AP) est l'axe de symétrie de l'angle $\widehat{BAC}$
D	Sur cette figure, la demi-droite [CO) est une… 	médiane du triangle ABC	bissectrice du triangle ABC	médiatrice du triangle ABC
E	Le centre du cercle inscrit dans un triangle…	est toujours à l'intérieur du triangle	peut être à l'extérieur du triangle	peut appartenir à un côté du triangle

jeu 1

Réaliser une telle figure, où les cercles sont tangents aux côtés des triangles, qui sont équilatéraux.





jeu 2

Pour découvrir le mot mystérieux, trouver le résultat de chaque question, puis associer la lettre de l'alphabet (1 : A ; 2 : B ; 3 : C ; …).

1	Le cinquième de la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle isocèle.	9
2	La moitié de la mesure d'un angle de 28°.	14
3	Cette mesure et 71° sont celles de deux angles complémentaires.	19
4	Le nombre de bissectrices des angles d'un triangle.	3
5	Le dixième de la mesure d'un angle plat.	18
6	Le dixième de la mesure d'un angle droit.	9
7	Le tiers de la mesure d'un angle d'un triangle équilatéral.	20

Chapitre 12

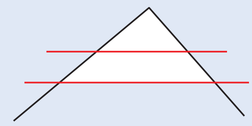
Théorème de Thalès

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE 77

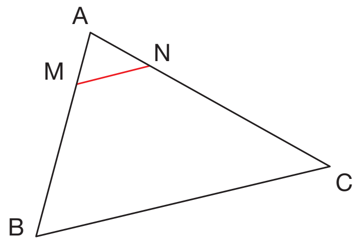
Deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine

Si deux demi-droites de même origine sont coupées par deux droites parallèles, alors les longueurs des côtés des deux triangles ainsi formés sont **proportionnelles**.



★

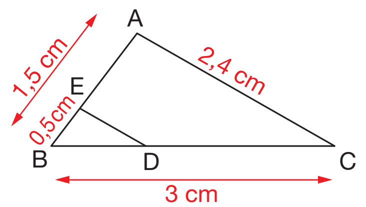
1 ABC est un triangle. M et N sont des points des côtés [AB] et [AC] tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
AB = 2,8 cm, AC = 3,6 cm, BC = 4 cm, MN = 1 cm.



Les côtés des triangles ABC et AMN ont des longueurs proportionnelles.
Compléter le tableau.

Triangle		AB	AC	BC	
ABC	→	2,8	3,6	4	
AMN	→	0,7	0,9	1	: 4
		AM	AN	MN	

2 ABC est un triangle.
D et E sont des points des côtés [BC] et [AB] tels que les droites (DE) et (AC) sont parallèles.



a. Citer deux triangles dont les côtés ont des longueurs proportionnelles.

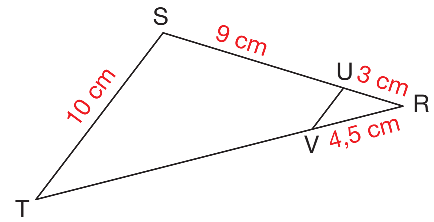
BDE et BCA

b. Compléter le tableau de proportionnalité ci-dessous pour calculer les longueurs BD et DE.

BE	BD	DE	
0,5	1	0,8	
1,5	3	2,4	× 3
BA	BC	AC	

★★

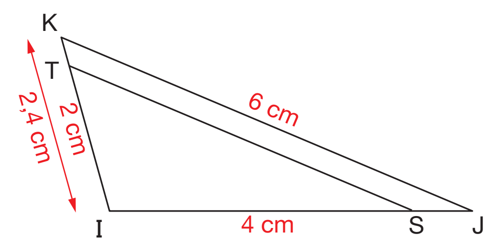
3 RST est un triangle.
U et V sont des points des côtés [RS] et [RT] tels que (UV) et (ST) sont parallèles.
Calculer les longueurs RT et UV.



	RU	RV	UV	
	3	4,5	2,5	
9 + 3	12	18	10	× 4
	RS	RT	ST	

Donc RT = 18 cm et UV = 2,5 cm.

4 IJK est un triangle.
S et T sont des points des côtés [IJ] et [IK] tels que (ST) et (JK) sont parallèles.
Calculer les longueurs IJ et ST.



IT	IS	ST	
2	4	5	
2,4	4,8	6	× 1,2
IK	IJ	JK	

Donc IJ = 4,8 cm et ST = 5 cm.

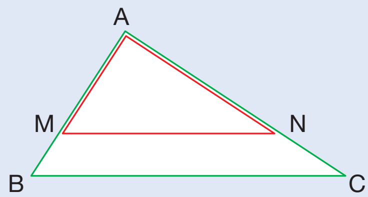
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE

78 Théorème de Thalès

ABC est un triangle.
M est un point du côté [AB] et N un point du côté [AC].
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors :

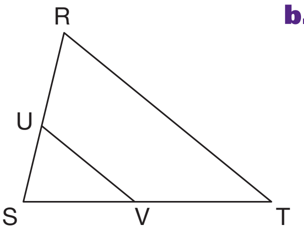
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



★

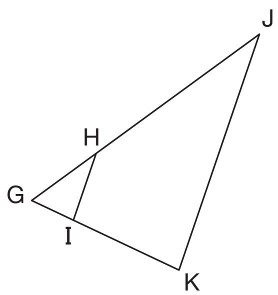
1 Pour chacune des configurations de Thalès ci-dessous, écrire des égalités de trois rapports de longueurs.

a.



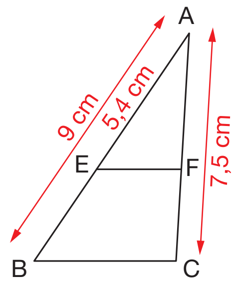
$$\frac{SU}{SR} = \frac{SV}{ST} = \frac{UV}{RT}$$

b.



$$\frac{GI}{GK} = \frac{GH}{GJ} = \frac{IH}{KJ}$$

2 E est un point de [AB] et F est un point de [AC] tels que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.



a. Compléter par les longueurs connues.

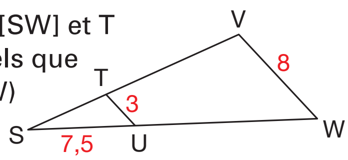
$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ donc $\frac{5,4}{9} = \frac{AF}{7,5}$

b. L'égalité des produits en croix permet d'écrire :

$9 \times AF = 5,4 \times 7,5$

Donc $AF = \frac{5,4 \times 7,5}{9}$ et $AF = 4,5$ cm.

3 U est un point de [SW] et T est un point de [SV] tels que les droites (TU) et (VW) sont parallèles.



a. Compléter par les longueurs connues :

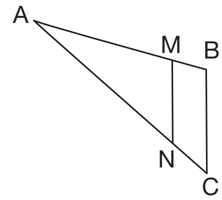
$\frac{ST}{SV} = \frac{SU}{SW} = \frac{TU}{VW}$ donc $\frac{7,5}{SW} = \frac{3}{8}$

b. Calculer SW en écrivant l'égalité des produits en croix.

$3 \times SW = 7,5 \times 8$ et $SW = \frac{7,5 \times 8}{3} = 20$

★★

4 M est un point de [AB] et N un point de [AC] tels que : (MN) // (BC), AB = 12 cm, AC = 16 cm, BC = 6 cm et AN = 12 cm.



a. Écrire les trois rapports égaux et remplacer les longueurs connues.

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ donc $\frac{AM}{12} = \frac{12}{16} = \frac{MN}{6}$

b. Calculer les longueurs AM et MN.

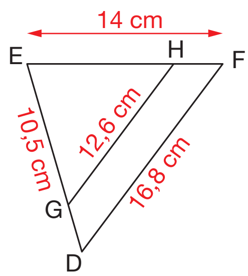
- $\frac{AM}{12} = \frac{12}{16}$ donc $AM = 12 \times \frac{12}{16}$

Ainsi $AM = \frac{12 \times 12}{16}$ c'est-à-dire AM = 9 cm.

- $\frac{12}{16} = \frac{MN}{6}$ donc $MN = 6 \times \frac{12}{16}$

Ainsi $MN = \frac{6 \times 12}{16}$ c'est-à-dire MN = 4,5 cm.

5 G est un point de [ED] et H est un point de [EF] tels que les doites (GH) et (DF) sont parallèles. Calculer les longueurs EH et ED.



D'après le théorème de Thalès :

$\frac{EG}{ED} = \frac{EH}{EF} = \frac{GH}{DF}$ c'est-à-dire $\frac{10,5}{ED} = \frac{EH}{14} = \frac{12,6}{16,8}$.

- $\frac{EH}{14} = \frac{12,6}{16,8}$ donc $EH = 14 \times \frac{12,6}{16,8}$.

Ainsi $EH = \frac{14 \times 12,6}{16,8}$ et EH = 10,5 cm.

- $\frac{10,5}{ED} = \frac{12,6}{16,8}$ donc $12,6 \times ED = 10,5 \times 16,8$.

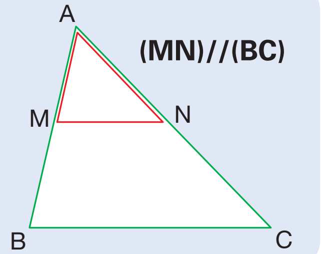
Ainsi $ED = \frac{10,5 \times 16,8}{12,6}$ et ED = 14 cm.

FICHE

79 Agrandissement et réduction

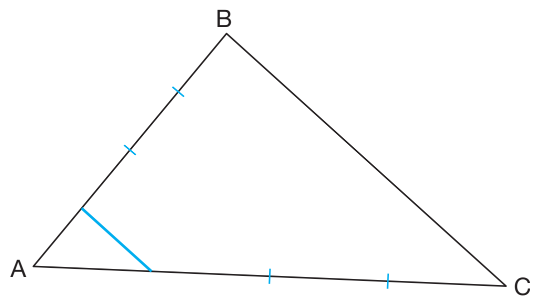
● Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k ($k > 0$) :
- **les longueurs sont multipliées par k,**
- **les angles sont conservés** (donc **la perpendicularité** est conservée),
- **le parallélisme est conservé.**

● Par exemple, pour la configuration de Thalès ci-contre, le triangle AMN est une réduction du triangle ABC dans le rapport $k = \frac{AM}{AB}$.

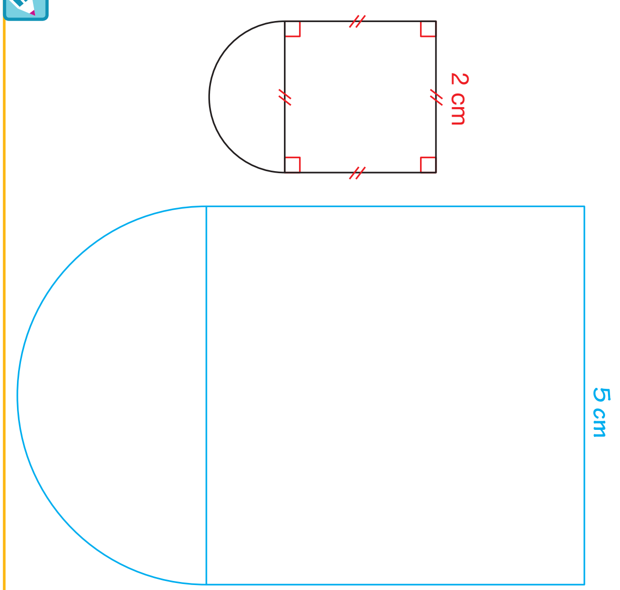


★

1 Construire une réduction du triangle ABC dans le rapport $\frac{1}{4}$.

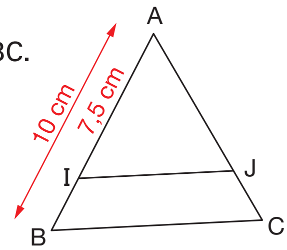


2 Cette figure est constituée d'un carré et d'un demi-cercle.
Construire un agrandissement de cette figure dans le rapport 2,5.



★★

3 Ce triangle AIJ est une réduction de ce triangle ABC.



a. Quel est le rapport k de réduction ?

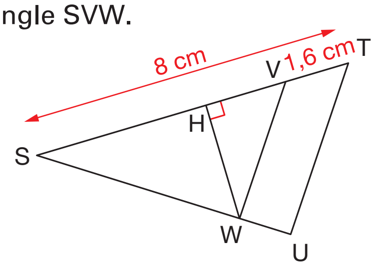
$k = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75$

b. On sait que AC = 9 cm et BC = 8 cm.
Calculer les longueurs AJ et IJ.

AJ = 0,75 × AC = 0,75 × 9 cm soit AJ = 6,75 cm

IJ = 0,75 × BC = 0,75 × 8 cm soit IJ = 6 cm

4 Ce triangle STU est un agrandissement de ce triangle SVW.



a. Quel est le rapport k d'agrandissement ?

SV = 8 cm − 1,6 cm = 6,4 cm.

Donc $k = \frac{ST}{SV} = \frac{8}{6{,}4} = 1{,}25$

b. Dans le triangle SVW, la hauteur [WH] a pour longueur 2,8 cm.
Quelle est la longueur de la hauteur issue de U dans le triangle SUT ?

Par l'agrandissement, la hauteur [WH] est transformée en la hauteur issue de U du triangle SUT (conservation des angles droits).

Donc sa longueur est : 1,25 × 2,8 cm = 3,5 cm.

FICHE

80 Utiliser un logiciel de géométrie

★

1 **1.** Avec un logiciel de géométrie,

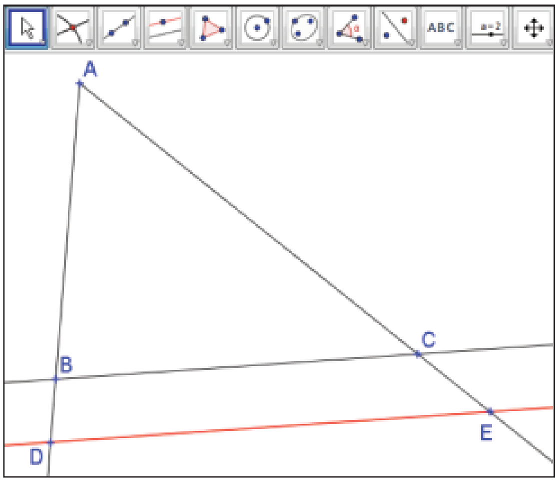
a. tracer deux demi-droites [AB) et [AC),

b. placer un point D qui appartient à la demi-droite [AB),

c. tracer la droite (BC),

d. tracer la parallèle à (BC) passant par D,

e. noter E son point d'intersection avec la demi-droite [AC).



2. Dans la zone de saisie, saisir :

a. "AD/AB=" + Distance [A,D]/Distance [A,B]

b. "AE/AC=" + Distance [A,E]/Distance [A,C]

3. a. Déplacer le point D sur la demi-droite [AB). Que remarque-t-on pour les deux rapports affichés ? Est-ce surprenant ?

On remarque que les deux rapports sont égaux.
Les droites (BC) et (DE) sont parallèles donc les triangles ABC et ADE forment une configuration de Thalès et on sait qu'alors $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

b. Citer un troisième rapport égal aux précédents, l'afficher à l'écran et vérifier qu'il en est bien ainsi.

Ce troisième rapport est $\frac{DE}{BC}$.

★★

2 **1.** Avec un logiciel de géométrie,

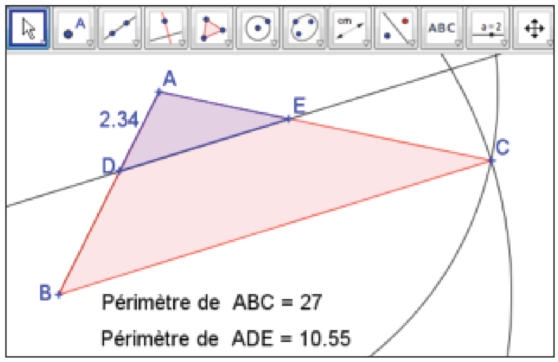
a. tracer un segment [AB] de longueur 6 cm,

b. placer un point C tel que AC = 9 cm et BC = 12 cm, puis créer le triangle ABC,

c. placer un point D qui appartient au segment [AB], afficher la longueur AD,

d. tracer la parallèle à la droite (BC) passant par D ; noter E son point d'intersection avec le segment [AC],

e. créer le triangle ADE et afficher les périmètres des triangles ABC et ADE.



2. Déplacer le point D et conjecturer la longueur AD pour laquelle le périmètre de ADE est égal au tiers du périmètre de ABC.

Il semble que lorsque AD = 2 cm, le périmètre de ADE est égal au tiers de 27 cm c'est-à-dire 9 cm.

3. Démontrer cette conjecture.

Une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ *multiplie les longueurs par* $\frac{1}{3}$ *donc multiplie le périmètre par* $\frac{1}{3}$.
Donc le triangle ADE doit être une réduction du triangle ABC dans le rapport $\frac{1}{3}$.
On doit donc avoir :
$AD = \frac{1}{3} \times AB = \frac{1}{3} \times 6\text{ cm} = 2\text{ cm}.$

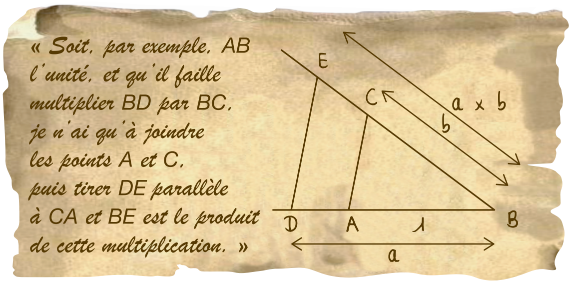
FICHE

81 Perfectionnement

★★★

1 

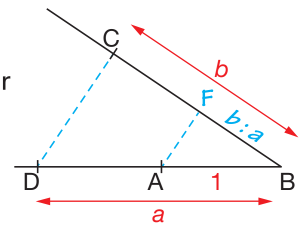
René Descartes, philosophe, mathématicien et physicien français (1596-1650) a écrit :



a. Avec les notations de cette figure, expliquer pourquoi BE = $a \times b$.

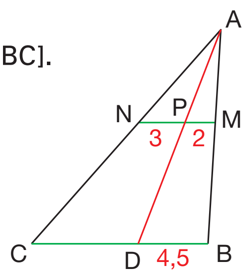
Les droites (AC) et (DE) sont parallèles.
Le théorème de Thalès dans les triangles ABC et DBE permet d'écrire $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$
c'est-à-dire $\frac{1}{a} = \frac{b}{BE}$.
L'égalité des produits en croix permet d'écrire
$1 \times BE = a \times b$ c'est-à-dire $BE = a \times b$.

b. Imaginer un procédé analogue pour représenter ci-contre un segment [BF] de longueur $b : a$.



On trace : (AF)//(DC) ....

2 M ∈ [AB], N ∈ [AC], D ∈ [BC].
La droite (MN) est parallèle à (BC) et coupe [AD] en P.
Calculer la longueur CD.



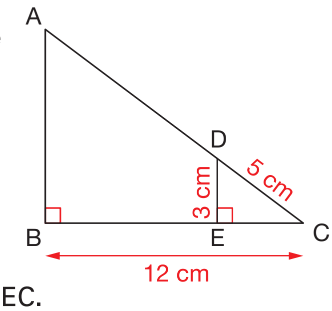
Le théorème de Thalès permet d'écrire :

• dans APM et ADB : $\frac{AP}{AD} = \frac{MP}{BD}$,

• dans APN et ADC : $\frac{AP}{AD} = \frac{NP}{CD}$,

Donc $\frac{MP}{BD} = \frac{NP}{CD}$ c'est-à-dire $\frac{2}{4{,}5} = \frac{3}{CD}$.
Donc $2 \times CD = 3 \times 4{,}5$ et $CD = 6{,}75$ cm.

3 ABC est un triangle rectangle en B.
E est le point de [BC] et D le point de [AC] tels que le triangle CDE soit rectangle en E.



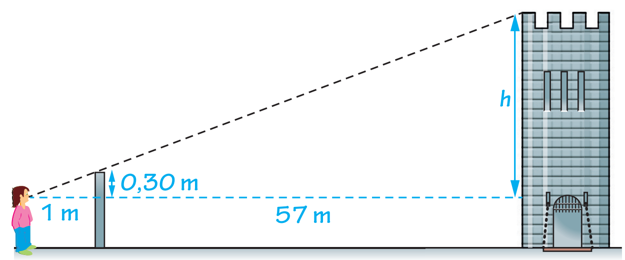
a. Calculer la longueur EC.

L'égalité de Pythagore dans le triangle CDE rectangle en E permet d'écrire $ED^2 + EC^2 = DC^2$
c'est-à-dire $3^2 + EC^2 = 5^2$.
Donc $EC^2 = 25 - 9 = 16$ et $EC = 4$ cm.

b. Calculer le périmètre du triangle ABC.

Les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires à (BC), donc elles sont parallèles entre elles.
Le triangle CBA est donc un agrandissement du triangle CED dans le rapport $k = \frac{12}{4} = 3$.
Or le périmètre de CED est 12 cm.
En effet, 3 cm + 4 cm + 5 cm = 12 cm.
Donc le périmètre de ABC est 3 fois plus grand c'est-à-dire 36 cm.

4 Un mur haut de 2 m se trouve à 57 m d'une tour. Vanessa qui mesure 1,70 m se place à 1 m du mur. Elle aperçoit juste le sommet de la tour.



Calculer la hauteur de la tour.

Dans la configuration de Thalès visualisée sur la figure : $\frac{1}{58} = \frac{0{,}3}{h}$.
Donc $h = 0{,}3 \times 58$ c'est-à-dire $h = 17{,}4$ m.
17,4 m + 1,7 m = 19,1 m,
donc la tour a 19,1 m de haut.

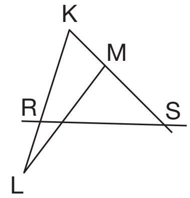
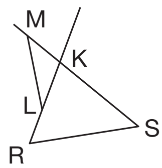
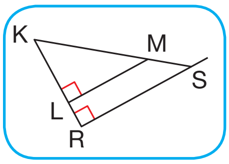
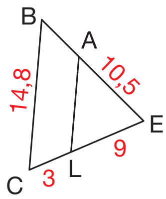
FICHE 82

QCM et jeux

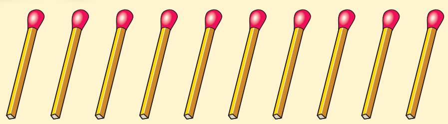
QCM

Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

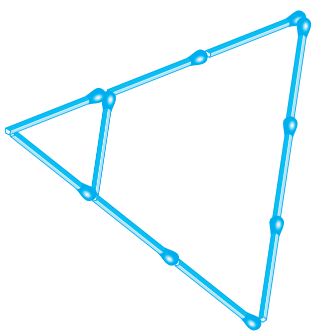
Note ..... / 5

A	Les triangles KML et KRS ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles deux à deux sur la figure…			
B	A est un point de [BE] et L un point de [CE] tels que les droites (AL) et (BC) sont parallèles. Alors… 	$\frac{BA}{BE}=\frac{CL}{CE}=\frac{BC}{AL}$	$\frac{AB}{AE}=\frac{AL}{BC}=\frac{CL}{LE}$	$\frac{EA}{EB}=\frac{EL}{EC}=\frac{AL}{BC}$
C	Sur la figure de la question B, la longueur EB est égale à…	13,5	14	14,5
D	Sur la figure de la question B, la longueur AL est égale à…	11,1	4	3,8
E	Sur la figure de la question B,…	AEL est une réduction de EBC dans le rapport $\frac{3}{4}$	le périmètre de EBC est 3 fois plus grand que celui de AEL	EBC est un agrandissement de AEL dans le rapport $\frac{4}{3}$

jeu 1

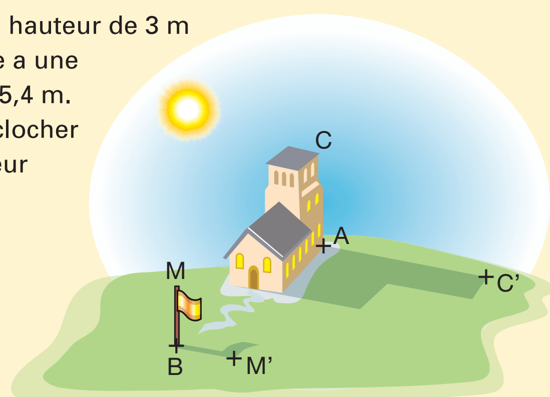


Comment peut-on disposer ces 10 allumettes pour obtenir deux triangles dont l'un a une aire 9 fois plus grande que l'autre ?



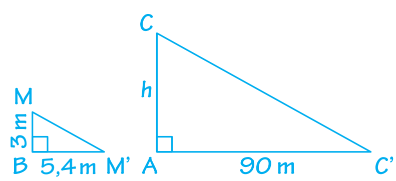
jeu 2

Le mât a une hauteur de 3 m et son ombre a une longueur de 5,4 m. L'ombre du clocher a une longueur de 90 m. Quelle est la hauteur du clocher ?



Réponse : 50 m

Le Soleil est si loin de la Terre que l'on peut supposer ses rayons (MM') et (CC') parallèles.



Le triangle ACC' est un agrandissement de BMM' dans le rapport $\frac{90}{5,4}$.

Donc $h=3\times\frac{90}{5,4}=50$.

Le clocher a une hauteur de 50 m.

Triangle rectangle : cosinus d'un angle aigu

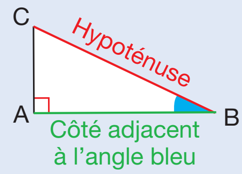
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE

83 Cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient $\dfrac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

Remarque : le cosinus d'un angle aigu est un nombre compris entre 0 et 1.

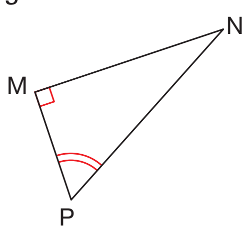


Dans le triangle rectangle ABC, $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$

★

1 MNP est un triangle rectangle en M.
Quel côté est l'hypoténuse ?

[PN]

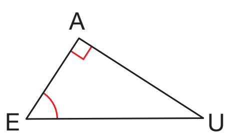


Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{MPN}$?

[PM]

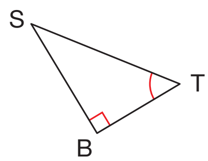
2 Dans chaque cas, compléter.

a.



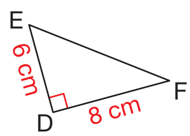
$\cos \widehat{AEU} = \dfrac{EA}{EU}$

b.



$\cos \widehat{BTS} = \dfrac{TB}{TS}$

3 **a.** Calculer la longueur EF dans ce triangle DEF rectangle en D.



L'égalité de Pythagore permet d'écrire : $EF^2 = DE^2 + DF^2$ c'est-à-dire $EF^2 = 6^2 + 8^2$.

Ainsi $EF^2 = 36 + 64 = 100$ et $EF = 10$ cm.

b. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{DEF}$.

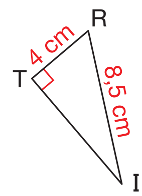
$\cos \widehat{DEF} = \dfrac{ED}{EF} = \dfrac{6}{10} = 0,6$

c. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{DFE}$.

$\cos \widehat{DFE} = \dfrac{FD}{FE} = \dfrac{8}{10} = 0,8$

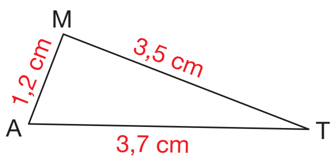
★★

4 TRI est un triangle rectangle en T.
Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{TRI}$.
En donner la valeur approchée par défaut au centième près.



$\cos \widehat{TRI} = \dfrac{RT}{RI} = \dfrac{4}{8,5}$ d'où $\cos \widehat{TRI} \approx 0,47$

5 **1.** Vérifier que le triangle MAT est rectangle.



[AT] est le côté le plus long.

$AT^2 = 3,7^2 = 13,69$

$MA^2 + MT^2 = 1,2^2 + 3,5^2 = 1,44 + 12,25 = 13,69$

Donc $AT^2 = MA^2 + MT^2$. L'égalité de Pythagore est vérifiée donc MAT est un triangle rectangle en M.

2. Calculer le cosinus de chaque angle, puis en donner la valeur approchée par défaut au dixième près.

a. $\widehat{MAT}$ **b.** $\widehat{MTA}$

a. $\cos \widehat{MAT} = \dfrac{AM}{AT} = \dfrac{1,2}{3,7}$ d'où $\cos \widehat{MAT} \approx 0,3$

b. $\cos \widehat{MTA} = \dfrac{TM}{TA} = \dfrac{3,5}{3,7}$ d'où $\cos \widehat{MTA} \approx 0,9$

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

84 Utiliser le cosinus pour calculer une longueur

La calculatrice doit être en mode DEGRE.
Si le symbole D ou DEG n'apparaît pas en haut de l'écran, on procède au réglage.

- **Casio *fx*-92 Collège 2D +**
SECONDE MODE CONFIG 3 (Deg)
On utilise la touche cos

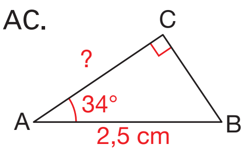
- **TI-Collège Plus Solaire**
mode mettre DEG en surbrillance entrer 2nde quitter mode
On utilise la touche cos.

★

1 Donner la valeur approchée par défaut au dixième près à l'aide de la calculatrice.

a. cos 32° ..≈ 0,8...   **b.** cos 45° ..≈ 0,7...

2 On se propose de calculer AC.



a. Compléter : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$

b. Remplacer dans cette égalité les données de l'énoncé. ... $\cos 34° = \frac{AC}{2,5}$ ....

c. Expliquer pourquoi $AC = 2,5 \times \cos 34°$.

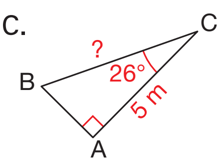
On multiplie chaque membre par 2,5.......................

$2,5 \times \cos 34° = 2,5 \times \frac{AC}{2,5}$ d'où $2,5 \times \cos 34° = AC$........

d. Calculer AC en cm et donner la valeur approchée par excès au dixième près.

AC ≈ 2,1 cm...

3 On se propose de calculer BC.



a. Compléter : $\cos \widehat{BCA} = \frac{CA}{CB}$

b. Remplacer dans cette égalité les données de l'énoncé. .... $\cos 26° = \frac{5}{BC}$ ..

c. Expliquer pourquoi $BC = \frac{5}{\cos 26°}$.

$BC \times \cos 26° = \frac{5}{BC} \times BC$ d'où $BC \times \cos 26° = 5$............

et $BC = \frac{5}{\cos 26°}$.......................................

d. Calculer BC en m et donner la valeur approchée par défaut au centième près.

BC ≈ 5,56 m...

★★

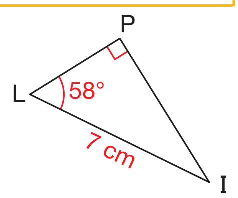
4 Dans chaque cas, calculer la longueur AB. Donner une valeur approchée au dixième près.

a. $\cos 65° = \frac{AB}{2}$ **b.** $\cos 50° = \frac{8}{AB}$

a. $AB = 2 \times \cos 65°$ d'où $AB \approx 0,8$ (ou 0,9)

b. $AB \times \cos 50° = 8$ d'où $AB = \frac{8}{\cos 50°}$
Ainsi $AB \approx 12,4$ (ou 12,5)

5 **a.** Calculer PL en cm et donner la valeur approchée par défaut au dixième près.



Dans le triangle rectangle PLI, ...

$\cos \widehat{PLI} = \frac{LP}{LI}$ c'est-à-dire $\cos 58° = \frac{LP}{7}$..................

Donc $LP = 7 \times \cos 58°$ et $LP \approx 3,7$ cm....................

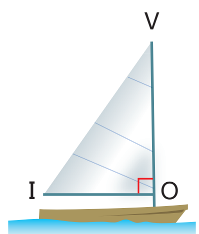
b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{PIL}$ et la valeur approchée par défaut au dixième près de PI en cm.

$\widehat{PIL} = 90° - 58° = 32°$..............................

$\cos \widehat{PIL} = \frac{IP}{IL}$ c'est-à-dire $\cos 32° = \frac{IP}{7}$..................

Donc $IP = 7 \times \cos 32°$ et $IP \approx 5,9$ cm...................

6 Calculer la longueur VI en m sur cette voile telle que :
OI = 2,5 m et $\widehat{VIO} = 62°$.
En donner la valeur approchée par excès au centième près.



$\cos \widehat{VIO} = \frac{IO}{IV}$ c'est-à-dire $\cos 62° = \frac{2,5}{IV}$

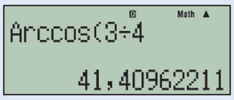
Donc $IV \times \cos 62° = 2,5$ d'où $IV = \frac{2,5}{\cos 62°}$
$VI \approx 5,33$ m

FICHE

85 Utiliser le cosinus pour déterminer un angle aigu

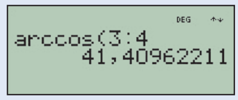
Déterminer la valeur approchée par défaut au degré près de la mesure d'un angle aigu $\widehat{xAy}$ tel que : $\cos \widehat{xAy} = \frac{3}{4}$.

● **Casio *fx*-92 Collège 2D+**



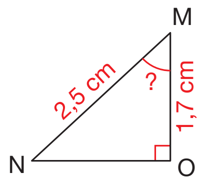
On lit : $\widehat{xAy} \approx 41°$.

● **TI-Collège Plus Solaire**



★

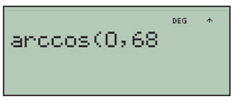
1 On se propose de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{NMO}$.



a. Compléter : $\cos\widehat{NMO} = \frac{MO}{MN}$

b. Remplacer dans cette égalité les données de l'énoncé. .... $\cos \widehat{NMO} = \frac{1,7}{2,5}$ ....

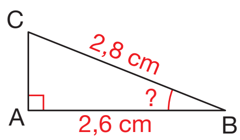
c. On utilise la calculatrice. Expliquer pourquoi on peut avoir cet écran.



$\frac{1,7}{2,5} = 0,68$ ....

Donner la valeur approchée par défaut à l'unité près de la mesure de l'angle $\widehat{NMO}$. .... $\widehat{NMO} \approx 47°$ ...

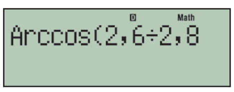
2 On se propose de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.



a. Compléter : $\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}$

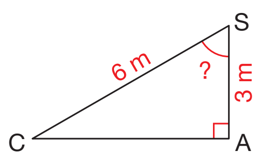
b. Remplacer dans cette égalité les données de l'énoncé. .... $\cos \widehat{ABC} = \frac{2,6}{2,8}$ ....

c. On utilise la calculatrice. En voici un écran. Donner la valeur approchée par excès à l'unité près de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.



$\widehat{ABC} \approx 22°$ ....

3 Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ASC}$.

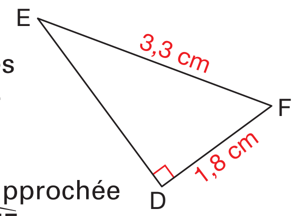


$\cos \widehat{ASC} = \frac{SA}{SC}$ c'est-à-dire $\cos \widehat{ASC} = \frac{3}{6} = 0,5$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{ASC} = 60°$.

★★

4 **a.** Déterminer la valeur approchée par excès à l'unité près de la mesure de l'angle $\widehat{EFD}$.



b. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$.

a. Dans le triangle DEF, rectangle en D.

$\cos \widehat{EFD} = \frac{FD}{FE}$ c'est-à-dire $\cos \widehat{EFD} = \frac{1,8}{3,3}$.

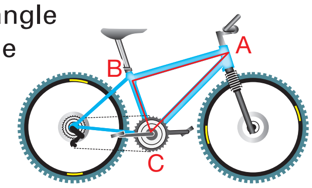
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{EFD} \approx 57°$.

b. $\widehat{DEF} = 90° - \widehat{EFD}$ d'où $\widehat{DEF} \approx 90° - 57°$.

Ainsi $\widehat{DEF} \approx 33°$.

5 On s'intéresse au triangle ABC formé par le cadre de ce VTT et tel que :

AB = 58,8 cm ;
BC = 24,5 cm ;
AC = 63,7 cm.



a. Vérifier que ce triangle est rectangle.

b. Déterminer des valeurs approchées à l'unité près des mesures de ses angles aigus.

a. $AC^2 = 63,7^2 = 4\,057,69$.

$BA^2 + BC^2 = 58,8^2 + 24,5^2$

$BA^2 + BC^2 = 3\,457,44 + 600,25$

d'où $BA^2 + BC^2 = 4\,057,69$.

Ainsi $AC^2 = BA^2 + BC^2$.

L'égalité de Pythagore est vérifiée donc ABC est un triangle rectangle en B.

b. • $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$ c'est-à-dire $\cos \widehat{BAC} = \frac{58,8}{63,7}$

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{BAC} \approx 23°$.

• $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{BAC}$ d'où $\widehat{ACB} \approx 90° - 23°$.

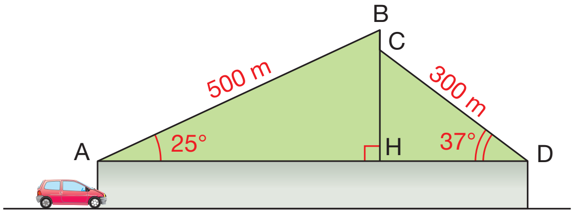
Ainsi $\widehat{ACB} \approx 67°$.

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....
Note ..... / .....

FICHE
86 Perfectionnement

★★★

1 Un tunnel a été creusé sous une colline.



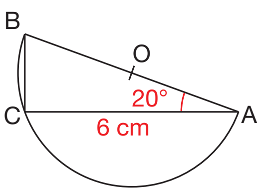
Avec les données de la figure, donner une valeur approchée de la longueur AD du tunnel.

• Dans le triangle rectangle ABH,
$\cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB}$
c'est-à-dire $\cos 25° = \frac{AH}{500}$.
Donc $AH = 500 \times \cos 25°$.
Avec la calculatrice on trouve $AH \approx 453$ m.

• Dans le triangle rectangle CDH,
$\cos \widehat{CDH} = \frac{DH}{DC}$ c'est-à-dire $\cos 37° = \frac{DH}{300}$.
Donc $DH = 300 \times \cos 37°$.
Avec la calculatrice on trouve $HD \approx 240$ m.

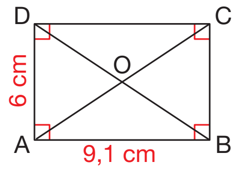
• Les points A, H et D sont alignés donc
$AD = AH + HD$ d'où $AD \approx 453 \text{ m} + 240 \text{ m}$
$AD \approx 693$ m

2 Avec les données de la figure, donner la valeur approchée par excès au dixième près de la longueur, en cm, du diamètre [AB] de ce demi-cercle auquel appartient le point C. Justifier.



Le point C appartient au demi-cercle de diamètre [AB], donc le triangle ABC est rectangle en C.
$\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$ c'est-à-dire $\cos 20° = \frac{6}{AB}$
d'où $AB \times \cos 20° = 6$ et $AB = \frac{6}{\cos 20°}$.
Avec la calculatrice, on trouve $AB \approx 6{,}4$ cm.

3 ABCD est un rectangle de centre O tel que :
AB = 9,1 cm et AD = 6 cm.



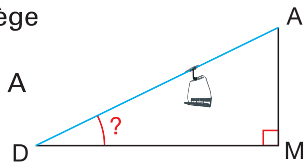
a. Déterminer la valeur approchée par excès au dixième près de la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.

b. En déduire une valeur approchée à l'unité près de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. Justifier.

a. L'égalité de Pythagore dans le triangle rectangle ADB permet d'écrire :
$BD^2 = AB^2 + AD^2$.
Donc $BD^2 = 9{,}1^2 + 6^2 = 82{,}81 + 36 = 118{,}81$.
Alors $BD = 10{,}9$ cm.
$\cos \widehat{ABD} = \frac{BA}{BD}$ c'est-à-dire $\cos \widehat{ABD} = \frac{9{,}1}{10{,}9}$.
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{ABD} \approx 33{,}4°$.

b. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et le même milieu donc $OA = OB$.
Le triangle OAB est donc isocèle en O.
Ses deux angles à la base ont la même mesure.
Alors $\widehat{AOB} = 180° - 2 \times \widehat{ABD}$
$\widehat{AOB} \approx 180° - 2 \times 33{,}4°$ ainsi $\widehat{AOB} \approx 113°$.

4 Le départ D du télésiège se trouve à l'altitude de 2 200 m et son arrivée A à l'altitude de 2 490 m.
On assimile le câble à un segment.



La longueur de ce câble entre D et A est 1,2 km.
Déterminer une valeur approchée à l'unité près de la mesure de l'angle d'inclinaison du câble.

• $AM = 2\,490 \text{ m} - 2\,200 \text{ m} = 290 \text{ m} = 0{,}29$ km.
• Dans le triangle rectangle DAM :
$\cos \widehat{DAM} = \frac{AM}{AD}$ c'est-à-dire $\cos \widehat{DAM} = \frac{0{,}29}{1{,}2}$.
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{DAM} \approx 76°$.
• $\widehat{ADM} = 90° - \widehat{DAM}$ d'où $\widehat{ADM} \approx 90° - 76°$.
Ainsi $\widehat{ADM} \approx 14°$.
L'angle d'inclinaison du câble est proche de 14°.

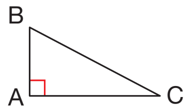
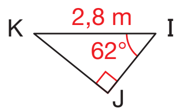
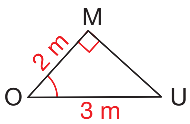
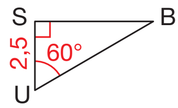
FICHE 87

QCM et jeux

QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque questions, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

Note ….. / 5

A	Dans un triangle ABC rectangle en A, $\cos \widehat{ABC}$ est égal à… 	$\frac{AB}{AC}$	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{BA}{BC}$
B	Pour ce triangle rectangle IJK, avec les données de la figure, on peut déterminer… 	la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$	la longueur du côté [IJ]	la longueur du côté [KJ]
C	Sur la figure de B, une valeur approchée au centième près de la longueur IJ, en m, est…	1,74 m	1,31 m	5,96 m
D	Une valeur approchée à l'unité près de la mesure de l'angle $\widehat{MOU}$ est… 	35°	48°	49°
E	Dans ce triangle rectangle BUS, la longueur BU, est égale à… 	5	$2{,}5 \times \cos 60°$	$\frac{2{,}5}{\cos 60°}$

jeu 1

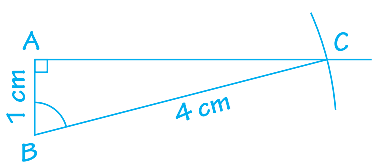
Une devinette

Ma 1re lettre est dans CHAT mais pas dans HETRE.
Ma 2e lettre est dans LOUP mais pas dans AULNE.
Ma 3e lettre est dans BISON mais pas dans MAGNOLIA.
Ma 4e lettre est dans ABEILLE mais pas dans PLATANE.
Ma 5e lettre est dans CANARD mais pas dans CHARME.
Ma 6e lettre est dans EMEU mais pas dans CEDRE.
Ma 7e lettre est dans BUSE mais pas dans BOULEAU.
Mon tout a un lien avec un angle aigu !

Réponse : COSINUS

jeu 2

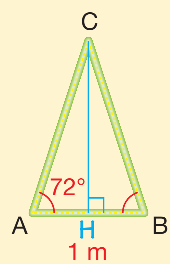
Avec seulement une règle graduée, un compas et une équerre, construire un angle dont le cosinus est $\frac{1}{4}$.



$\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{4}$

jeu 3

Un designer veut réaliser ce triangle isocèle avec un néon led flexible d'une longueur de 5 m.
Le pourra-t-il ?
Les données :
- chaque angle à la base mesure 72° ;
- le côté horizontal mesure 1 m.



- ABC étant un triangle isocèle en C, la hauteur issue de C coupe [AB] en son milieu H.
Donc $AH = 1\text{ m} : 2 = 0{,}5\text{ m}$.
- Dans le triangle rectangle ACH :
$\cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC}$ c'est-à-dire $\cos 72° = \frac{0{,}5}{AC}$
d'où $AC \times \cos 72° = 0{,}5$ et $AC = \frac{0{,}5}{\cos 72°}$
Avec la calculatrice, on trouve $AC \approx 1{,}6$ m.
- $1{,}6\text{ m} \times 2 + 1\text{ m} = 4{,}2\text{ m}$ et $4{,}2 < 5$
donc il a assez avec 5 m de néon.

Pyramide et cône de révolution

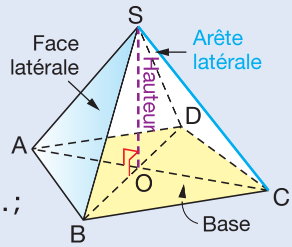
Chapitre 14

CALCUL MENTAL	• .... • .... • .... • .... •	Note
	• .... • .... • .... • .... •	..... / .....

FICHE 88 Pyramide

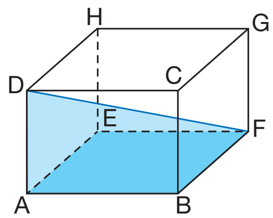
- Une **pyramide** est un solide dont :
  - une face est un polygone appelé **base** ;
  - toutes les **faces latérales** sont des triangles qui ont un sommet commun : le **sommet** S de la pyramide.
- Une pyramide de sommet S est dite **régulière** lorsque :
  - sa base est un polygone régulier de centre O : triangle équilatéral, carré,... ;
  - [SO] est la hauteur de la pyramide.

Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles superposables.



★

1 La pyramide DABFE est contenue dans un parallélépipède rectangle.



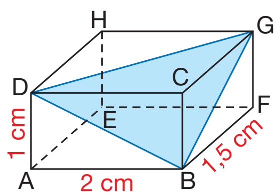
a. Quelle est la base de cette pyramide ?

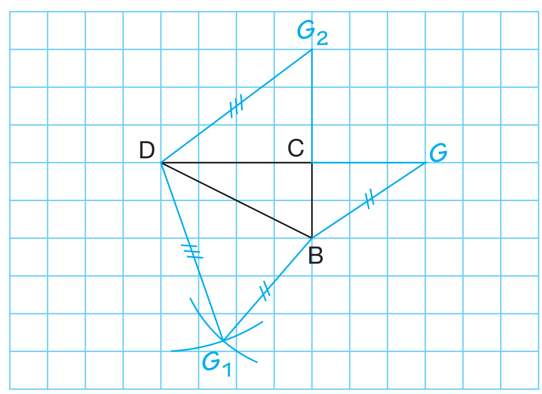
La base est le rectangle ABFE.

b. Quel est le sommet de cette pyramide ? Quelle est sa hauteur ?

Le sommet est D ; la hauteur est [DA].

2 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Compléter un patron en vraie grandeur de la pyramide DCGB.





★★

3 SABCD est une pyramide régulière de sommet S telle que AB = 1,5 cm.

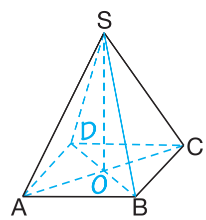
a. Quelle est la nature de la base ABCD ?

ABCD est un carré de côté 1,5 cm.

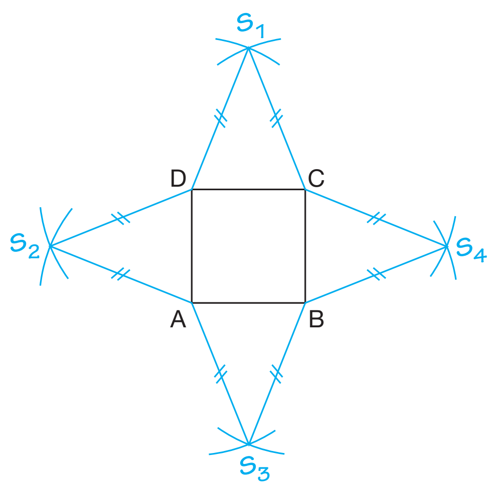
b. Indiquer la nature des faces latérales.

Ces faces sont des triangles isocèles en S.

c. Terminer cette représentation en perspective de la pyramide SABCD.



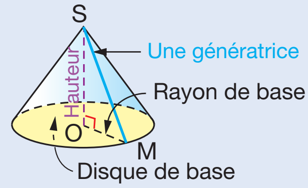
d. On suppose à présent que SB = 2 cm.
Compléter un patron de la pyramide SABCD.



CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note ..... / .....

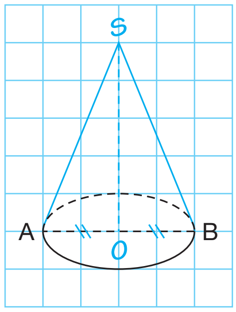
FICHE
89 Cône de révolution

Un **cône de révolution** a pour **sommet** S et pour **base** un disque de centre O.
La **hauteur** de ce cône est le segment [SO] (ou la longueur SO).
La droite (SO) est **perpendiculaire** au plan de la base.



★

1 On a commencé à tracer ci-contre une représentation en perspective d'un cône de révolution de sommet S et de hauteur 2,5 cm.
La base est un disque de centre O et de diamètre [AB] tel que AB = 2 cm.
Terminer la représentation.



2 Un cône de révolution a pour sommet S.
Son disque de base a pour centre O.
M est un point du cercle de base.

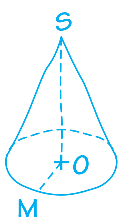
1. Faire un dessin à main levée pour représenter en perspective un tel cône.

2. Ce cône est tel que SM = 2,5 cm et SO = 2 cm.

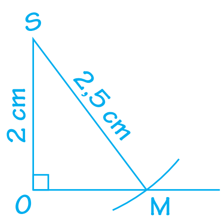
a. Construire en vraie grandeur le triangle OSM.

b. Calculer le rayon OM du disque de base.

1.



2. a.

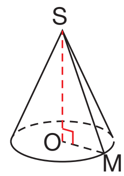


b. L'égalité de Pythagore dans le triangle SOM rectangle en O permet d'écrire :
$SM^2 = OS^2 + OM^2$ d'où $2{,}5^2 = 2^2 + OM^2$
$6{,}25 = 4 + OM^2$ d'où $OM^2 = 6{,}25 - 4 = 2{,}25$.
Alors OM = 1,5 cm.

★★

3 **a.** Pour ce cône de révolution, citer :

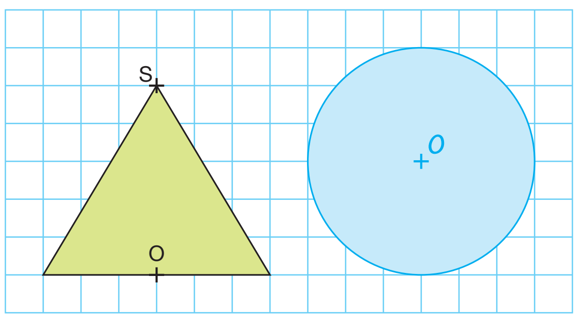
- la hauteur : *[SO]* ....
- une génératrice : *[SM]* ....
- un rayon du disque de base : *[OM]* ..



b. Calculer la hauteur SO de ce cône dans le cas où OM = 5 cm et SM = 13 cm.

L'égalité de Pythagore dans le triangle SOM rectangle en O permet d'écrire :
$SM^2 = OS^2 + OM^2$ d'où $13^2 = OS^2 + 5^2$
$169 = OS^2 + 5^2$ d'où $OS^2 = 169 - 25 = 144$.
Alors SO = 12 cm.

4 Voici une vue de face d'un cône de révolution, obtenue avec un logiciel de géométrie.



a. À côté de la vue de face, construire la vue de dessus de ce cône de révolution.

b. Calculer l'arrondi au dixième de la longueur d'une génératrice.

On note M un point du cercle de base.
L'égalité de Pythagore dans le triangle SOM rectangle en O permet d'écrire :
$SM^2 = OS^2 + OM^2$ d'où $SM^2 = 2{,}5^2 + 1{,}5^2$
$SM^2 = 6{,}25 + 2{,}25 = 8{,}5$ d'où $SM \approx 2{,}9$.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note ..... / .....

FICHE 90

Utiliser un logiciel de géométrie dans l'espace

★

1 EABCD est une pyramide régulière de sommet E dont la base est un carré ABCD de centre O et de côté 2 cm.
On se propose de réaliser un patron d'une telle pyramide avec un logiciel de géométrie.

a. • Dans le menu « Options », choisir Etiquetage et cocher ✓ Seulement les nouveaux points .

• Afficher la grille et placer les points :
A(–1 ; –1) B(1 ; –1) C(1 ; 1) D(–1 ; 1) O(0 ; 0).

• Tracer le quadrilatère ABCD.
Quelle est sa nature ?

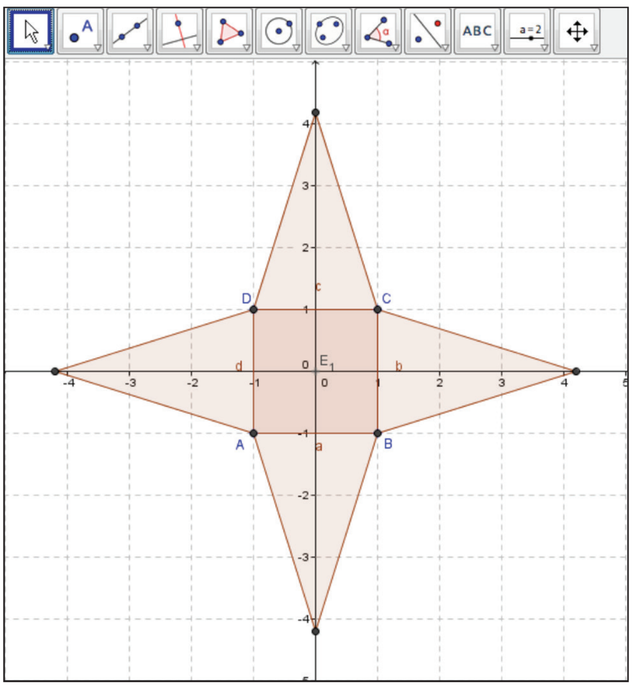
ABCD est un carré de côté 2 et de centre O.

b. • Dans le menu « Affichage », choisir « Graphique 3D ».

• Sur l'axe bleu de la fenêtre « Graphique 3D » placer le point E « d'abscisse » 3.

• Tracer la pyramide EABCD (utiliser Pyramide et cliquer sur le carré ABCD puis sur E).

c. Construire un patron de la pyramide EABCD (utiliser Patron et cliquer sur la pyramide EABCD).



★★

2 **a.** Avec un logiciel de géométrie dans l'espace :

• dans le menu « Options », choisir Etiquetage et cocher ✓ Seulement les nouveaux points ,

• afficher la grille et placer les points :
A(3 ; 0) B(0 ; 0) C(0 ; –4),

• tracer le triangle ABC,

• afficher la fenêtre « Graphique 3D » et placer un point D sur l'axe bleu de la fenêtre « Graphique 3D »,

• construire la pyramide DABC dont la base est le triangle ABC et de hauteur [DB],

• construire un patron de la pyramide DABC.

b. Compléter ce tableau.

Triangle	Nature du triangle
ABC	*rectangle en B*
ABD	*rectangle en B*
ACD	*quelconque*
BCD	*rectangle en B*

3 Avec un logiciel de géométrie dans l'espace :

a. • afficher la grille et placer les points A(0 ; 0) et B(0 ; –3),

• afficher la fenêtre « Graphique 3D » et placer un point C sur l'axe bleu de la fenêtre « Graphique 3D »,

• construire le cône de révolution qui a le point A pour centre de la base, C pour sommet et 3 pour rayon (utiliser Cône et cliquer sur A puis sur C, puis saisir 3).

b. • Afficher le volume du cône (utiliser Volume puis cliquer sur le cône).

• Déplacer le point C sur l'axe bleu de la fenêtre « Graphique 3D ».
Donner des valeurs approchées de la hauteur et de la génératrice du cône lorsque son volume est 38 cm^3.

La hauteur [CA] mesure environ 4 cm

et la génératrice [CB] mesure environ 5 cm.

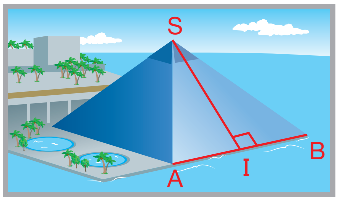
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE

91 Calculs d'aires

★

1 Cette pyramide régulière de sommet S a pour base un carré ABCD de côté 16 m.
La hauteur [SI] issue de S du triangle SAB mesure 15 m.



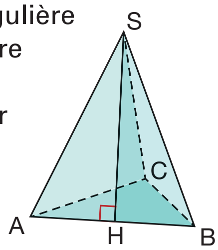
a. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la base ABCD.

b. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ de la face SAB puis l'aire latérale (qui est la somme des aires des faces latérales) $\mathcal{A}_2$ de cette pyramide.

a. ABCD est un carré de côté 16 m.
$\mathcal{A} = c^2 = 16^2 = 256$.
L'aire de la base ABCD est 256 m².

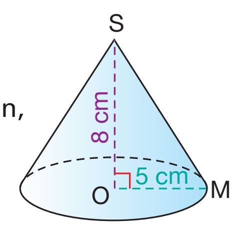
b. $\mathcal{A}_1 = \dfrac{AB \times SI}{2} = \dfrac{16 \times 15}{2} = 120$
$\mathcal{A}_1 = 120$ cm².
$\mathcal{A}_2 = 4 \times \mathcal{A}_1 = 4 \times 120 = 480$.
L'aire latérale est 480 m².

2 SABC est une pyramide régulière de sommet S, à base triangulaire telle que AB = 7 cm.
Dans le triangle SAB, la hauteur [SH] issue de S mesure 10 cm.
Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ de la face SAB puis l'aire latérale $\mathcal{A}_2$ de cette pyramide.



$\mathcal{A}_1 = \dfrac{AB \times SH}{2} = \dfrac{7 \times 10}{2} = 35$
$\mathcal{A}_1 = 35$ cm².
$\mathcal{A}_2 = 4 \times \mathcal{A}_1 = 4 \times 35 = 140$.
L'aire latérale est 140 cm².

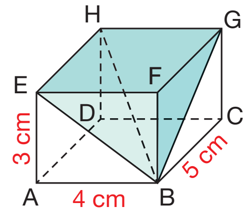
3 Calculer la valeur exacte, en cm², de l'aire $\mathcal{A}$ du disque de base de ce cône de révolution, puis en donner l'arrondi au centième.



$\mathcal{A} = \pi R^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi$.
Donc $\mathcal{A} = 25\pi$ cm² *et* $\mathcal{A} \approx 78{,}54$ cm².

★★

4 La pyramide BEFGH est contenue dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.



a. Préciser la nature de la base EFGH de cette pyramide puis calculer l'aire $\mathcal{A}$ de cette base.

b. Préciser la nature des faces EFB et BFG puis calculer les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de ces faces.

c. Calculer la longueur EB.

d. Le triangle EBH est rectangle en E.
Calculer l'aire $\mathcal{A}_3$ de la face EBH.

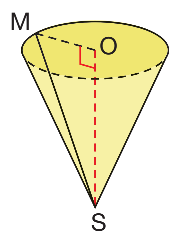
a. EFGH est un rectangle.
$\mathcal{A} = EF \times FG = 4 \times 5 = 20$ *donc* $\mathcal{A} = 20$ cm².

b. EFB et BFG sont des triangles rectangles en F.
$\mathcal{A}_1 = \dfrac{FE \times FB}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$ *donc* $\mathcal{A}_1 = 6$ cm².
$\mathcal{A}_2 = \dfrac{FB \times FG}{2} = \dfrac{5 \times 3}{2} = 7{,}5$ *donc* $\mathcal{A}_2 = 7{,}5$ cm².

c. L'égalité de Pythagore dans le triangle BEF rectangle en E permet d'écrire :
$BE^2 = FB^2 + FE^2$ *d'où* $BE^2 = 3^2 + 4^2$
$BE^2 = 9 + 16 = 25$ *et* $BE = 5$ cm.

d. $\mathcal{A}_3 = \dfrac{EB \times EH}{2} = \dfrac{5 \times 5}{2} = 12{,}5$
donc $\mathcal{A}_3 = 12{,}5$ cm².

5 Ce cône de révolution a pour génératrice [SM] et pour hauteur [SO] telles que SM = 8 cm et SO = 3 cm.
Calculer, en cm², la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ du disque de base, puis en donner l'arrondi au centième.



L'égalité de Pythagore dans le triangle SOM rectangle en O permet d'écrire :
$SM^2 = OS^2 + OM^2$ *d'où* $8^2 = 3^2 + OM^2$
$64 = 9 + OM^2$ *d'où* $OM^2 = 64 - 9 = 55$.
$\mathcal{A} = \pi \times OM^2 = \pi \times 55 = 55\pi$.
Donc $\mathcal{A} = 55\pi$ cm².
$\mathcal{A} \approx 172{,}79$ cm².

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE

92 Calculs de volumes (1)

- Volume d'un **prisme droit** de base d'aire $\mathscr{B}$ et de hauteur h : $\mathscr{V} = \mathscr{B} \times h$.
- Volume d'un **parallélépipède rectangle** de dimensions L, l et h : $\mathscr{V} = L \times l \times h$
- Volume d'un **cube** d'arête c : $\mathscr{V} = c^3$
- Volume d'un **cylindre de révolution** de rayon r et hauteur h : $\mathscr{V} = \pi \times r^2 \times h$

Unités usuelles de volume et de contenance

- $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$

★

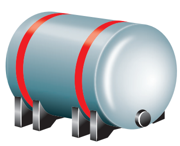
1 SOCLE Dans chaque cas, calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide.

a. Un cube d'arête 7 cm.

b. Un parallélépipède rectangle de dimensions 8 cm, 10 cm et 4,5 cm.

a. $\mathscr{V} = c^3 = 7^3 = 343$
donc $\mathscr{V} = 343\ \text{cm}^3$.
b. $\mathscr{V} = L \times l \times h = 8 \times 10 \times 4{,}5 = 360$.
Donc $\mathscr{V} = 360\ \text{cm}^3$.

2 SOCLE Cette citerne a la forme d'un cylindre de diamètre 1,40 m et de hauteur 2 m.

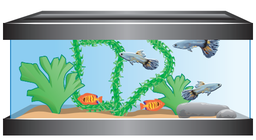


a. Calculer la valeur exacte du volume $\mathscr{V}$ de cette citerne, en m³, puis en donner l'arrondi à l'unité.

b. Combien de litres peut contenir cette citerne ?

a. Rayon : $r = 1{,}40\ \text{m} : 2 = 0{,}7\ \text{m}$
$\mathscr{V} = \pi r^2 h = \pi \times 0{,}7^2 \times 2 = 0{,}98\pi$.
Donc $\mathscr{V} = 0{,}98\pi\ \text{m}^3$ et $\mathscr{V} \approx 3\ \text{m}^3$.
b. $3\ \text{m}^3 = 3\,000\ \text{dm}^3 = 3\,000\ \text{L}$.
Cette citerne peut contenir environ 3 000 L.

3 SOCLE



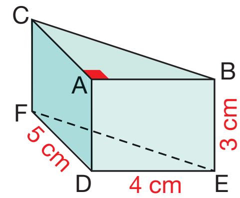
Aquarium
Longueur 1,2 m
Largeur 40 cm
Hauteur 55 cm

Calculer la capacité en litres de cet aquarium.

$1{,}2\ \text{m} = 12\ \text{dm}$; $40\ \text{cm} = 4\ \text{dm}$;
$55\ \text{cm} = 5{,}5\ \text{dm}$.
Volume : $L \times l \times h = 12 \times 4 \times 5{,}5 = 264$
$264\ \text{dm}^3 = 264\ \text{L}$.
Donc la capacité de l'aquarium est 264 L.

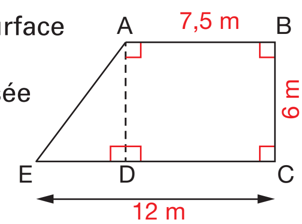
★★

4 Le prisme droit ABCDEF a pour hauteur [AD] et pour base le triangle ABC rectangle en A.
Calculer son volume $\mathscr{V}$.



• Calcul de l'aire $\mathscr{B}$ de la base.
$\mathscr{B} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{4 \times 5}{2} = 10$ donc $\mathscr{B} = 10\ \text{cm}^2$.
• $\mathscr{V} = \mathscr{B} \times AD = 10 \times 3 = 30$.
Le volume du prisme est $30\ \text{cm}^3$.

5 On a représenté la surface au sol d'un CDI.
Cette surface est composée du rectangle ABCD et du triangle rectangle EDA.



a. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la surface au sol du CDI.

b. Les murs du CDI ont une hauteur de 2,80 m.
Calculer le volume $\mathscr{V}$, en m³, de ce CDI.

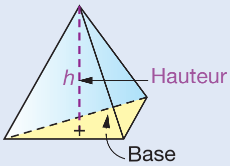
a. • $ED = EC - DC = 12\ \text{m} - 7{,}5\ \text{m}$
$ED = 4{,}5\ \text{m}$.
• Aire $\mathscr{A}_1$ du rectangle ABCD :
$\mathscr{A}_1 = 7{,}5 \times 6 = 45$ d'où $\mathscr{A}_1 = 45\ \text{m}^2$.
Aire $\mathscr{A}_2$ du triangle ADE :
$\mathscr{A}_2 = \dfrac{4{,}5 \times 6}{2} = 13{,}5$ d'où $\mathscr{A}_2 = 13{,}5\ \text{m}^2$.
Aire A de la surface au sol :
$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = 45 + 13{,}5 = 58{,}5$.
Donc $\mathscr{A} = 58{,}5\ \text{m}^2$.
La surface au sol du CDI est $58{,}5\ \text{m}^2$.
b. On assimile le CDI à un prisme droit dont la base est ABCE, de hauteur 2,80m.
$\mathscr{V} = \mathscr{A} \times h = 58{,}5 \times 2{,}8 = 163{,}8$.
Donc $\mathscr{V} = 163{,}8\ \text{m}^3$.
Le volume du CDI est $163{,}8\ \text{m}^3$.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note ..... / .....

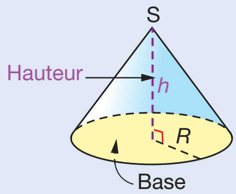
FICHE

93 Calculs de volumes (2)

Le **volume** $\mathcal{V}$ d'une pyramide ou d'un cône de révolution est égal **au tiers du produit de l'aire** $\mathcal{B}$ **de sa base par sa hauteur** h.



$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$

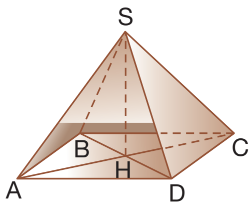


$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$

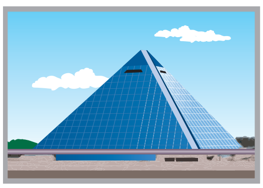
★

1 Un tipi en forme de pyramide a pour base un rectangle ABCD de centre H et pour hauteur [SH]. Voici ses dimensions :
AD = 1,60 m, CD = 1,20 m
et SH = 2,40 m.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle ABCD, puis le volume $\mathcal{V}$ du tipi.



• $\mathcal{A} = AD \times CD = 1{,}60 \times 1{,}20 = 1{,}92$
L'aire du rectangle ABCD est 1,92 m².
• $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times SH = \frac{1}{3} \times 1{,}92 \times 2{,}40 = 1{,}536$
Le volume du tipi est 1,536 m³.

2 La Pyramid Arena à Memphis (USA) est une pyramide régulière de hauteur 98 m dont la base est un carré de 180 m de côté.
Calculer le volume $\mathcal{V}$ de cette pyramide.



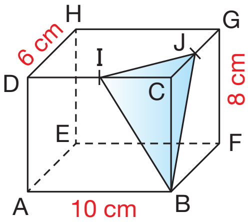
• Calcul de l'aire $\mathcal{B}$ de la base.
$\mathcal{B} = c^2 = 180^2 = 32\,400$ m²
• $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 32\,400 \times 98$
$\mathcal{V} = 1\,058\,400$ m³.
Le volume de cette pyramide est 1 058 400 m³.

3 Calculer le volume $\mathcal{V}$, en cm³, d'un cône de révolution de rayon de base 12 cm et de hauteur 10 cm. Donner l'arrondi à l'unité.

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 10.$
Donc $\mathcal{V} = 480\pi$ cm³ et $\mathcal{V} \approx 1\,508$ cm³.

★★

4 Ci-contre, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle ; I et J sont les milieux respectifs des segments [CD] et [CG].
Calculer le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide BCIJ.

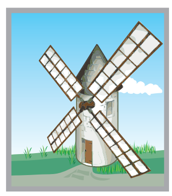


On peut considérer BCIJ comme une pyramide de sommet B, de base le triangle CIJ et de hauteur [CB].
• CI = 10 cm : 2 = 5 cm ; CJ = 6cm : 2 = 3 cm.
Calcul de l'aire $\mathcal{B}$ de la base CIJ.
$\mathcal{B} = \frac{CI \times CJ}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = 7{,}5$ $\quad$ $\mathcal{B} = 7{,}5$ cm².
• $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 7{,}5 \times 8 = 20$ $\quad$ $\mathcal{V} = 20$ cm³.
Le volume de la pyramide est 20 cm³.

5 Ce moulin est composé d'un cylindre et d'un cône de révolution dont le diamètre commun est 3 m.
Le cylindre a une hauteur de 6 m et le cône a une hauteur de 2 m.

a. Calculer, en m³, la valeur exacte :
- du volume $\mathcal{V}_1$ du cylindre ;
- du volume $\mathcal{V}_2$ du cône ;
- du volume $\mathcal{V}$ du moulin.

b. Donner l'arrondi de $\mathcal{V}$ à l'unité.



a. Rayon : R = 3 m : 2 = 1,50 m.
• $\mathcal{V}_1 = \pi \times R^2 \times h = \pi \times 1{,}5^2 \times 6 = 13{,}5\pi.$
Donc $\mathcal{V}_1 = 13{,}5\pi$ m³.
• $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 1{,}5^2 \times 2 = 1{,}5\pi.$
Donc $\mathcal{V}_2 = 1{,}5\pi$ m³.
• $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 13{,}5\pi + 1{,}5\pi = 15\pi.$
$\mathcal{V} = 15\pi$ m³. Le volume du moulin est 15π m³.
b. $\mathcal{V} \approx 47$ m³.

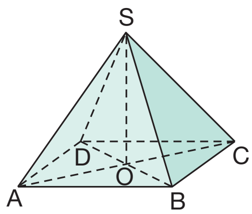
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE

94 Perfectionnement

★★★

1 La pyramide SABCD a pour base le rectangle ABCD de centre O et pour hauteur [SO].
On donne : AB = 3,2 cm, BC = 2,4 cm et SA = 5,2 cm.



a. Calculer la longueur AC puis la longueur AO.

b. Calculer la hauteur SO de la pyramide.

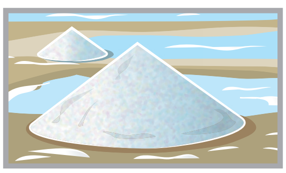
c. Calculer le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide.

a. • L'égalité de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B permet d'écrire :
$AC^2 = BA^2 + BC^2$.
Donc $AC^2 = 3{,}2^2 + 2{,}4^2 = 16$
$AC = 4$ cm.
• Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu donc O est le milieu de [AC].
AO = 4 cm : 2 = 2 cm.

b. L'égalité de Pythagore dans le triangle SAO rectangle en O permet d'écrire :
$SA^2 = OS^2 + OA^2$.
$5{,}2^2 = OS^2 + 2^2$ ou $27{,}04 = OS^2 + 4$.
$OS^2 = 27{,}04 - 4 = 23{,}04$ d'où $OS = 4{,}8$ cm.

c. • Calcul de l'aire $\mathcal{B}$ de la base ABCD.
$\mathcal{B} = AB \times BC = 3{,}2 \text{ cm} \times 2{,}4 \text{ cm} = 7{,}68 \text{ cm}^2$.
• $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 7{,}68 \times 4{,}8$.
$\mathcal{V} = 12{,}288 \text{ cm}^3$.
Donc le volume de la pyramide est $12{,}288 \text{ cm}^3$.

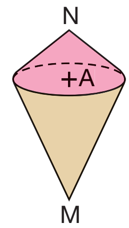
2 Dans les marais salants, le sel est stocké sous forme de cônes de révolution de volume 1 000 m³.



Un de ces cônes de sel a un rayon de 9 m.
Quelle est la hauteur *h*, en m, de ce cône de sel ?
Donner l'arrondi au dixième.

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times h = 27\,\pi \times h$
$27\pi \times h = 1\,000$ donc $h = \frac{1\,000}{27\pi}$
$h \approx 11{,}8$ m.
La hauteur du cône de sel est environ 11,8 m.

3 Cette glace est formée de deux cônes de sommets M et N accolés par leur base qui a pour centre A et pour rayon 3 cm.
De plus MN = 10 cm.
Calculer le volume $\mathcal{V}$, en cm³, de cette glace. Donner la valeur approchée par défaut à l'unité près.

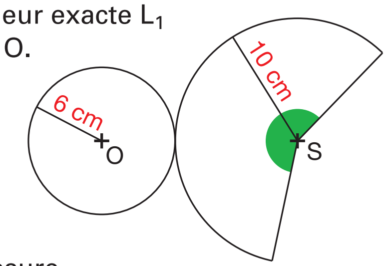


On note $\mathcal{V}_1$ le volume du cône de sommet N et $\mathcal{V}_2$ le volume du cône de sommet M.
• $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times AN = 3\pi \times AN$.
• $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times AM = 3\pi \times AM$.
• $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 3\pi \times AN + 3\pi \times AM$
$\mathcal{V} = 3\pi \times (AN + AM)$
$\mathcal{V} = 3\pi \times MN$ d'où $V = 3\pi \times 10$
Donc $\mathcal{V} = 30\pi \text{ cm}^3$ et $\mathcal{V} \approx 94 \text{ cm}^3$.
Le volume de la glace est environ 94 cm³.

4 On a représenté le patron d'un cône de révolution.

a. Calculer la longueur exacte L_1 du cercle de centre O.

b. Calculer la longueur exacte L_2 d'un cercle de rayon 10 cm.



c. En déduire la mesure de l'angle marqué en vert.

a. $L_1 = 2\pi \times 6 \text{ cm} = 12\pi$ cm.
b. $L_2 = 2\pi \times 10 \text{ cm} = 20\pi$ cm.
c. L'arc de cercle de centre S a la même longueur que le cercle de centre O.
On construit ce tableau de proportionnalité.

Longueur de l'arc de cercle (en cm)	20π	12π
Angle (en °)	360	a

$a \times 20\pi = 360 \times 12\pi$

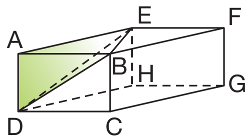
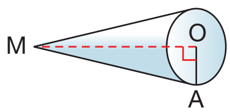
$a = \frac{360 \times 12\pi}{20\pi} = \frac{20 \times 18 \times 12 \times \pi}{20 \times \pi} = 216$

L'angle marqué en vert mesure 216°.

FICHE **95** **QCM et jeux**

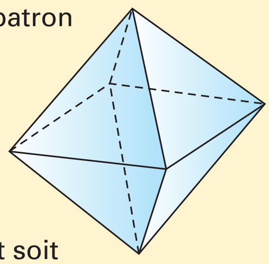
QCM **Voici un questionnaire à choix multiples.**
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

Note ….. / 5

A	ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.  Une hauteur de la pyramide ADBE est…	[AB]	[DE]	[EA]
B	Les faces latérales d'une pyramide régulière peuvent être des triangles…	isocèles	équilatéraux	quelconques
C	AM = 25 cm et OM = 24 cm.  Pour ce cône de révolution…	la hauteur est 25 cm	le rayon du disque de base est 1 cm	le rayon du disque de base est 7 cm
D	60 cm^3 est le volume…	d'une pyramide régulière qui a pour base un carré de côté 6 cm et pour hauteur 5 cm	d'une pyramide de hauteur 9 cm dont la base est un rectangle de 5 cm sur 4 cm	d'un parallélépipède rectangle de dimensions 7,5 cm, 4 cm et 2 cm
E	108π cm^3 est le volume…	d'un cône de révolution de rayon 9 cm et de hauteur 4 cm	d'un cône de révolution de diamètre 6 cm et de hauteur 9 cm	d'un cylindre de rayon 4 cm et de hauteur 6,75 cm

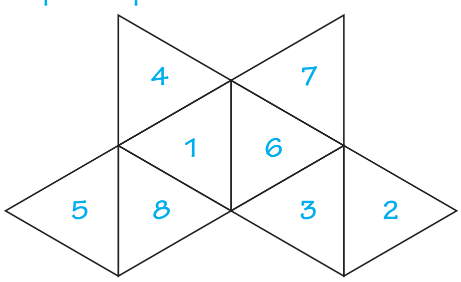
jeu 1

On a tracé ci-dessous un patron de l'octaèdre régulier représenté ci-contre.
Numéroter de 1 à 8 les faces de ce patron afin que la somme des numéros des quatre faces autour de chaque sommet soit égale à 18.



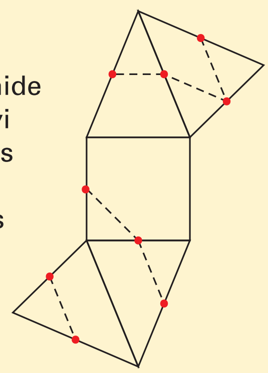
D'après *Mathématiques sans Frontières*

Exemple de réponse

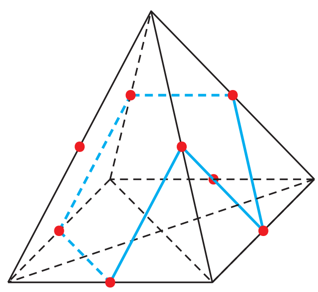


jeu 2

Tracer sur le dessin en perspective de la pyramide régulière le chemin suivi par la limace, d'après les traces qui apparaissent sur ce patron (les points rouges sont les milieux des arêtes).



D'après *IREM ParisNord*



Le bowling

TÂCHES COMPLEXES

La situation-problème

Oscar a inventé un bowling mathématique qui se joue avec des boules numérotées de 1 à 10.
Trouver les numéros des trois boules d'Anne, puis calculer son score maximal.
Ensuite, indiquer des combinaisons que Louis a pu réaliser, lorsqu'il a réussi un « strike » avec ces trois boules :

Doc. 1 : Les dix boules

Les supports de travail

Les documents, la calculatrice.

Doc. 2 : La règle du jeu

- À tour de rôle, chaque joueur choisit trois boules parmi les dix.
- Le joueur doit utiliser ses trois boules à chaque jeu.
- Avec les numéros de ses trois boules et en utilisant chacun d'eux une seule fois, le joueur doit essayer d'atteindre les nombres de 1 à 10.
- Le joueur peut utiliser les quatre opérations, les parenthèses et la notation puissance.
- Le score d'un joueur est le nombre de nombres atteints.
- Un joueur qui atteint les dix nombres de 1 à 10 réalise un « strike ».

Doc. 3 : Un exemple

Avec ces trois boules, Nils a atteint 3 et 5.
Ses calculs : $4 - (9 - 8) = 3$ et $9 - 8 + 4 = 5$.
Il a atteint deux nombres : son score est 2.
Remarque : il aurait pu réaliser un meilleur score !

Doc. 4 : La devinette d'Anne

- Une de mes boules porte le numéro 7.
- Le numéro d'une de mes boules augmenté de 6 est égal au triple de ce numéro.
- La moyenne des numéros de mes trois boules est 6.

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

- ***Numéros des boules d'Anne***

• On note x le numéro d'Anne qui vérifie : « Le numéro augmenté de 6 est égal au triple de ce numéro ».
On obtient l'équation :

$$x + 6 = 3x$$
$$x + 6 - x = 3x - x$$
$$6 = 2x$$
$$x = 3$$

La 2ᵉ boule d'Anne porte le numéro 3.
• « La moyenne des numéros de mes trois boules est 6 » donc $6 \times 3 = 18$
$$18 - (7 + 3) = 8$$
La 3ᵉ boule d'Anne porte le numéro 8.
Anne a choisi les boules dont les numéros sont 3, 7 et 8.

- ***Score d'Anne***

Voici les nombres qu'elle peut atteindre.
Exemples :

$(8 - 7)^3 = 1$ $\quad$ $3 + 7 - 8 = 2$
$3 \times (8 - 7) = 3$ $\quad$ $3 + 8 - 7 = 4$
$(7 + 8) : 3 = 5$

Donc le score d'Anne est 5.

- ***Les combinaisons de Louis***

Exemples :

$6 : 3 - 1 = 1$ $\quad$ $6 - 3 - 1 = 2$
$6 : 3 + 1 = 3$ $\quad$ $6 - 3 + 1 = 4$
$6 - 1^3 = 5$ $\quad$ $6 \times 1^3 = 6$
$6 + 1^3 = 7$ $\quad$ $6 + 3 - 1 = 8$
$(6 + 3)^1 = 9$ $\quad$ $6 + 3 + 1 = 10$

Le sachet à fondue

La situation-problème

Madame Allard décide de commercialiser des sachets à fondue « Trois fromages ».
Aider madame Allard à compléter les étiquettes qu'elle collera sur ses sachets.

Les supports de travail

Les documents, la calculatrice.

Doc. 1 : Le contenu d'un sachet

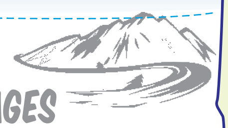
$\frac{2}{5}$ de Comté
$\frac{1}{4}$ d'Appenzell
280 g de Beaufort

Doc. 2 : Les trois fromages à la coupe

Fromage	Prix au kg	Matière grasse (sur masse totale)
Comté	21 €	28 %
Appenzell	24 €	31 %
Beaufort	19 €	33 %

Doc. 3 : L'étiquette à compléter

FONDUE
TROIS FROMAGES



Poids : 800 g
Prix unitaire : 16,84 €
Prix au kg : 21,05 €

Composition :
Comté : 320 g
Appenzell : 200 g
Beaufort : 280 g

Matière grasse : 30,5 %

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous et sur le document 3.

- **Masses du sachet, du Comté et de l'Appenzell**

$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=\frac{13}{20}$

Le Comté et l'Appenzell représentent les $\frac{13}{20}$ du sachet.

$1-\frac{13}{20}=\frac{20}{20}-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$

Les 280 g de Beaufort représentent les $\frac{7}{20}$ du sachet.

$\frac{1}{20}$ (c'est-à-dire 7 fois moins) pèse 40 g donc le sachet (c'est-à-dire 20 fois plus) pèse 20×40 g soit 800 g.

Le sachet contient 800 g de fromage.

$\frac{2}{5} \times 800\text{ g} = 320\text{ g}$.

Le sachet contient 320 g de Comté.

$\frac{1}{4} \times 800\text{ g} = 200\text{ g}$.

Le sachet contient 200 g d'Appenzell.

- **Prix du sachet**

320 g = 0,32 kg ; 200 g = 0,2 kg et 280 g = 0,28 kg.

$0{,}32 \times 21 + 0{,}2 \times 24 + 0{,}28 \times 19 = 16{,}84$.

Donc le prix du sachet est 16,84 €.

- **Prix au kg**

Le prix de 800 g est 16,84 € donc le prix de 100 g (c'est-à-dire 8 fois moins) est $\frac{16{,}84\text{ €}}{8}$ soit 2,105 € et le prix de 1 000 g (c'est-à-dire 10 fois plus) est $10 \times 2{,}105$ € soit 21,05 €.

Le prix de 1 kg du mélange contenu dans le sachet est 21,05 €.

- **Pourcentage de matière grasse dans le sachet**

$p=\frac{28}{100} \times 320\text{ g} + \frac{31}{100} \times 200\text{ g} + \frac{33}{100} \times 280\text{ g}$

$p = 89{,}6\text{ g} + 62\text{ g} + 92{,}4\text{ g} = 244\text{ g}$

Le sachet contient 244 g de matière grasse.

$\frac{244}{800} = 0{,}305 = \frac{30{,}5}{100}$

Le sachet contient 30,5 % de matière grasse.

La fonte du glacier

TÂCHES COMPLEXES

La situation-problème

Étienne affirme qu'avec le réchauffement climatique la superficie du glacier Cook a diminué de plus de 30 % entre 1963 et 2013. A-t-il raison ?

Les supports de travail

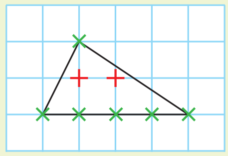
Les documents, la calculatrice, les instruments de géométrie.

Doc. 1 : La formule de Pick

S'il y a x points du quadrillage « à l'intérieur » et y points du quadrillage « sur les bords » d'un polygone, alors l'aire A du polygone, en carreaux, est donnée par la formule :

$$A = x + \frac{y}{2} - 1$$

Exemple

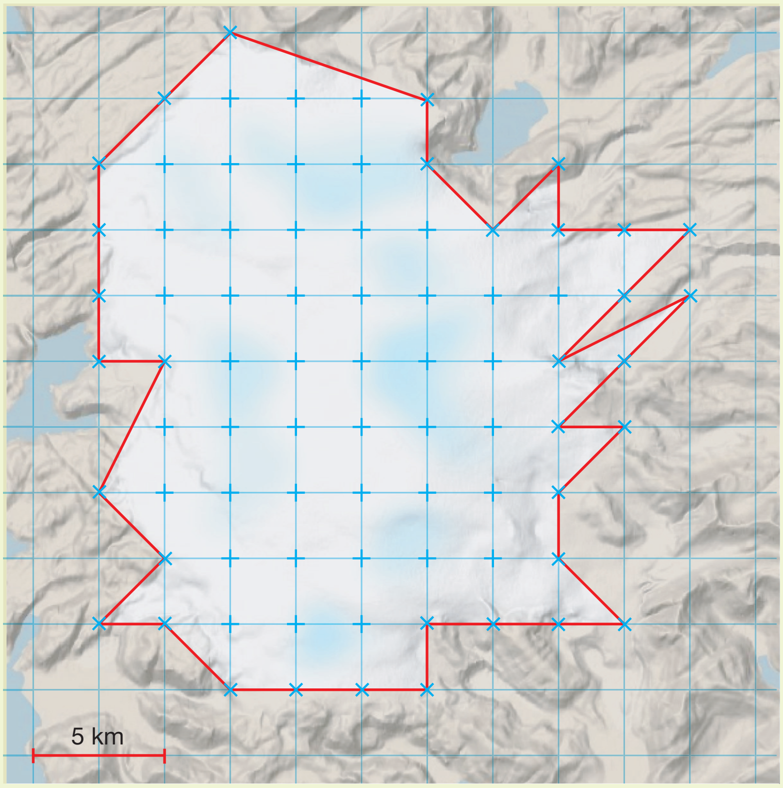


$x = 2$ et $y = 6$

d'où $A = 2 + \frac{6}{2} - 1$

$A = 4$ ainsi l'aire du polygone est 4 carreaux.

Doc. 2 : La photographie en 2013 du glacier délimité par un polygone



Doc. 3 : Le glacier Cook

Le glacier Cook est le plus grand glacier entièrement français. Situé dans les îles Kerguelen, au sud de l'océan Indien dans l'Antarctique, il culmine à 1 049 m d'altitude.
Sa superficie était d'environ 500 km² en 1963.

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

- **Superficie du glacier en 2013**
- Pour ce polygone on a $x = 44$ et $y = 34$.

Donc $A = 44 + \frac{34}{2} - 1 = 44 + 17 - 1 = 60$

L'aire A du polygone est 60 carreaux.

- $\frac{5 \text{ km}}{2} = 2{,}5$ km donc le côté d'un carreau mesure 2,5 km dans la réalité.

$2{,}5^2 = 6{,}25$ donc l'aire d'un carreau dans la réalité est 6,25 km².

$60 \times 6{,}25 \text{ km}^2 = 375 \text{ km}^2$.

La superficie du glacier en 2013 était environ 375 km².

- **Pourcentage de diminution entre 1963 et 2013**
- $500 \text{ km}^2 - 375 \text{ km}^2 = 125 \text{ km}^2$

La superficie a diminué de 125 km².

- $\frac{125}{500} = \frac{25}{100} = 0{,}25$ donc la superficie du glacier a diminué d'environ 25 % entre 1963 et 2013.

Étienne a donc tort.

Le nombre de nos ancêtres

La situation-problème

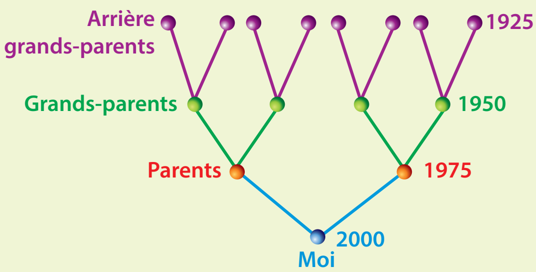
Lucie, qui est née en 2000, se pose la question :
« Combien d'ancêtres avons-nous ? »
Aider Lucie à calculer le nombre de ses ancêtres qui **ont vécu entre 1700 et aujourd'hui** puis à calculer le nombre « théorique » de ses ancêtres qui **vivaient en l'an 1000.**
Expliquer ensuite pourquoi ce nombre est « théorique ».

Les supports de travail

Les documents, la calculatrice.

Doc. 1 : Le début du travail de Lucie

Je construis un arbre.
Je pars de l'hypothèse qu'une nouvelle génération apparaît tous les 25 ans.



Doc. 2 : Évolution de la population mondiale

–5000	5 à 20 millions
400	190 à 206 millions
1000	254 à 345 millions
1500	425 à 540 millions
1700	600 à 679 millions
1800	0,813 à 1,125 milliard
1900	1,550 à 1,762 milliard
2000	6,085 milliards
2014	7,2 milliards

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

- **Nombre d'ancêtres de Lucie qui ont vécu entre 1700 et aujourd'hui.**
- $2\,000 - 1\,700 = 300$ et $300 : 25 = 12$
Il y a eu 12 générations depuis 1700.
- moi $\xrightarrow{\times 2}$ parents $\xrightarrow{\times 2}$ grands-parents $\xrightarrow{\times 2}$ arrière-grands-parents ; moi $\xrightarrow{\times 2^3}$ arrière-grands-parents

Donc à la 12^{e} génération, Lucie avait 2^{12} ancêtres.
- $s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}$
$s = 8\,190$
Donc 8 190 ancêtres de Lucie ont vécu entre 1700 et aujourd'hui.

- **Nombre d'ancêtres de Lucie qui vivaient en l'an 1000.**
- $2\,000 - 1\,000 = 1\,000$ et $1\,000 : 25 = 40$
Il y a eu 40 générations depuis l'an 1000.
- Donc à la 40^{e} génération, Lucie avait 2^{40} ancêtres.

$2^{40} \approx 1{,}099511628 \times 10^{12}$
Donc environ $1{,}099511628 \times 10^{12}$ soit environ 1 100 milliards d'ancêtres « théoriques » de Lucie vivaient en l'an 1000.
Or en l'an 1000, d'après le document 2, la population mondiale était estimée à moins de 345 millions.
Comme le nombre d'ancêtres ne peut qu'être inférieur à l'ensemble de la population mondiale, ce nombre ne peut être que théorique.
Sans doute nous sommes tous cousins.

Les colliers

La situation-problème

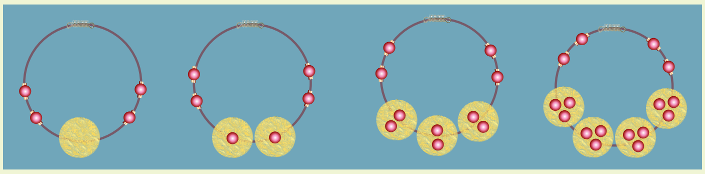
Aider Héloïse, créatrice de bijoux, à compléter les factures de deux de ses clients.

Les supports de travail

Les documents, la calculatrice, le tableur.

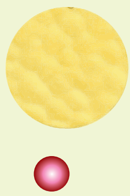
Doc. 1 : Les colliers

Héloïse réalise des colliers avec des disques plaqués or et des perles rouges.
Elle respecte les règles suivantes :
– elle fixe, sur chaque disque, une perle rouge de moins que le nombre de disques du collier ;
– elle utilise toujours 4 perles pour fermer le collier.



Doc. 2 : Les tarifs (hors taxes) d'Héloïse

- Main d'œuvre : 17 €.
- Prix d'un disque : 6,50 €.
- Prix d'une perle : 0,20 €.



Doc. 3 : La facture de Mme Irma

- Main d'œuvre : 17 €
- 16 disques plaqués or : $\boxed{104\ €}$
- $\boxed{244}$ perles : $\boxed{48{,}80\ €}$

– Total Hors taxes : $\boxed{169{,}80\ €}$
– TVA 20 % : $\boxed{33{,}96\ €}$
– Total TTC : $\boxed{203{,}76\ €}$

Doc. 4 : La facture de M. Domingo

- Main d'œuvre : 17 €
- $\boxed{25}$ disques plaqués or : $\boxed{162{,}50\ €}$
- 604 perles : $\boxed{120{,}80\ €}$

– Total Hors taxes : $\boxed{300{,}30\ €}$
– TVA 20 % : $\boxed{60{,}06\ €}$
– Total TTC : $\boxed{360{,}36\ €}$

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous et sur les documents 3 et 4.

- **Facture de Mme Irma**

- $16 \times (16 - 1) + 4 = 244$
Le collier comporte 244 perles.
- $16 \times 6{,}50\ € = 104\ €$
$244 \times 0{,}20\ € = 48{,}80\ €$.
$17\ € + 104\ € + 48{,}80\ € = 169{,}80\ €$
Le total hors taxes est 169,80 €.
- $\frac{20}{100} \times 169{,}80 = 33{,}96\ €$
La TVA est de 33,96 €.
- $169{,}80\ € + 33{,}96\ € = 203{,}76\ €$
Le prix TTC du collier de Mme Irma est 203,76 €.

- **Facture de M. Domingo**

- $604 - 4 = 600$
On cherche deux nombres entiers consécutifs dont le produit est 600.
On peut réaliser cette feuille de calcul.
On saisit la formule =B1*(B1−1) dans la cellule B2 avant de la recopier vers la droite.

	A	B	C	D	E	F	…	X	Y	Z
1	Nombre de disques	1	2	3	4	5		23	24	25
2	Nombre de perles	0	2	6	12	20	…	506	552	600

Le collier comporte 25 disques.
- $25 \times 6{,}50\ € = 162{,}50\ €$
$604 \times 0{,}20\ € = 120{,}80\ €$.
$17\ € + 162{,}50\ € + 120{,}80\ € = 300{,}30\ €$
Le total hors taxes est 300,30 €.
- $\frac{20}{100} \times 300{,}30 = 60{,}06\ €$
La TVA est de 60,06 €.
- $300{,}30\ € + 60{,}06\ € = 360{,}36\ €$
Le prix TTC du collier de M. Domingo est 360,36 €.

Le cross du collège

La situation-problème

Après avoir participé à un cross, les élèves des six classes d'un collège ont présenté les distances parcourues sous forme de résumés.
Retrouver l'information manquante sur le résumé de la 4^{e}C puis désigner la classe la plus sportive, c'est-à-dire la classe dans laquelle les élèves ont, en moyenne, parcouru la plus grande distance.

Les supports de travail

Les documents, la calculatrice ou un tableur.

Doc. 1 : Un article de journal

Jeudi dernier, c'est au stade que les 140 élèves de 4^e du collège Victor Hugo se sont réunis pour leur traditionnel cross annuel. Encouragements et bonne humeur, cette année encore les collégiens ont passé une très bonne matinée.
A cette occasion, les élèves ont aussi effectué un travail mathématique qui leur a permis d'établir que la distance moyenne parcourue par élève était de 6 km.
Bravo à tous pour ce bel effort !

Doc. 2 : Les résumés réalisés par les différentes classes

4° A

km	2	4	5	6	7	8	9
Effectif	1	3	4	4	8	4	1

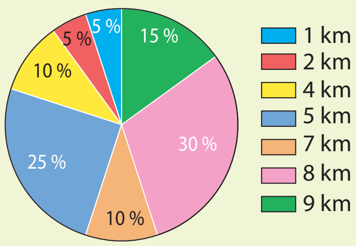
4° B

3	7	7	7	3	7
3	7	3	4	5	4
9	3	6	7	4	9
9	8	3	4	7	6

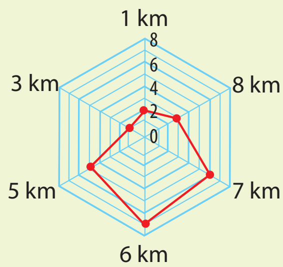
4° C

- Effectif total : 22
- Distance moyenne parcourue par élève : 7 km

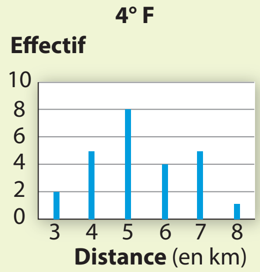
4° D



4° E



4° F



Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

• On peut construire ce tableau à l'aide des données des résumés des documents 1 et 2.

Classe	Effectif	Distance totale (en km)	Distance moyenne par élève (en km)
4^{e}A	25	155	6,2
4^{e}B	24	135	5,625
4^{e}C	22		
4^{e}D			
4^{e}E	24	138	5,75
4^{e}F	25	133	5,32
Total	140		6

Explications pour la 4^{e}D

• $140 - (25 + 24 + 22 + 24 + 25) = 20$
L'effectif de la 4^{e}D est 20 élèves.

• $\frac{5}{100} \times 1 + \frac{5}{100} \times 2 + \frac{10}{100} \times 4 + \ldots + \frac{15}{100} \times 9 = 6{,}25$
La distance moyenne par élève est 6,25 km.

• $20 \times 6{,}25 \text{ km} = 125$
La distance totale parcourue est 125 km.

Explications pour la 4^{e}C

$140 \times 6 \text{ km} = 840 \text{ km}$

• $840 - (155 + 135 + 125 + 138 + 133) = 154$
La distance totale parcourue est 154 km.

• $\frac{154 \text{ km}}{22} = 7 \text{ km}$
La distance moyenne par élève est 7 km.

• La classe la plus sportive est la 4^{e}C : les élèves ont parcouru en moyenne 7 km.

Les baguettes

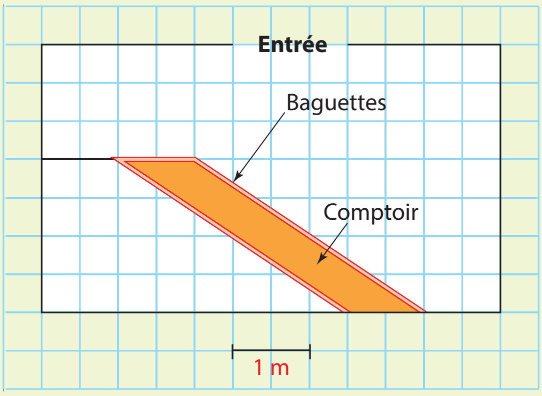
La situation-problème

Un ouvrier doit installer une bordure, faite de baguettes, le long de trois côtés du comptoir de l'accueil d'une agence immobilière. Aider cet ouvrier à chiffrer le prix des baguettes.

Les supports de travail

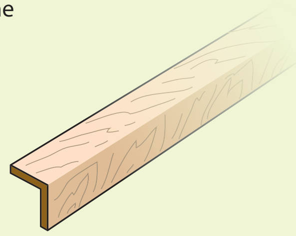
Les documents, la calculatrice.

Doc. 1 : Le plan de l'agence



Doc. 2 : Les baguettes

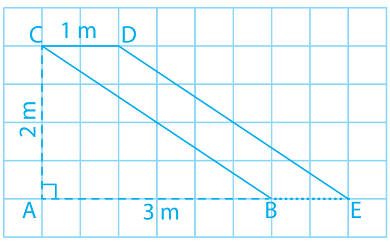
Essence du bois : chêne
Dimensions
Épaisseur : 19 mm
Largeur : 19 mm
Longueur : 500 mm
Référence : 10457
Prix : 8,90 € l'unité



D'après *Évaluation PISA 2012*

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

- *Longueur de la bordure*



• *L'ouvrier pose des baguettes sur les côtés [BC], [CD] et [DE].*

• *On place le point A de sorte que le triangle ABC soit rectangle en A.*
On lit les dimensions sur le document 1 :
$AB = 3$ m et $AC = 2$ m.
L'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
c'est-à-dire : $BC^2 = 2^2 + 3^2$
Donc $BC^2 = 13$ et $BC \approx 3{,}606$ m.
La longueur BC est environ 3,606 m soit environ 3606 mm.

• *DE = BC.*

- *Nombre de baguettes nécessaires*

• *3 606 mm = 500 mm × 7 + 106 mm*
Pour le côté [BC], comme pour le côté [DE], Il faut acheter 7 baguettes.
Il reste 106 mm à chaque fois.
106 mm × 2 = 212 mm et 212 < 500
Il faut acheter une baguette supplémentaire.

• *1 m = 1 000 mm et 1 000 mm = 500 mm × 2*
Pour le côté [CD], il faut 2 baguettes.

• *$7 \times 2 + 1 + 2 = 17$*
On a besoin de 17 baguettes en tout (16 entières et une qui sera découpée en deux morceaux de 106 mm avec une chute).

- *Coût*

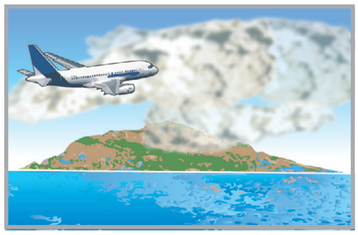
8,90 € × 17 = 151,30 €.
Les baguettes coûteront 151,30 €.

TÂCHES COMPLEXES

Le nuage de cendres

La situation-problème

Un nuage de cendres provenant de l'éruption d'un volcan oblige un avion à se détourner de son itinéraire habituel.
Aider le commandant de bord à choisir un nouvel itinéraire : peut-il contourner le nuage et poser l'avion sur un aéroport situé à proximité ? Peut-il faire demi-tour ?



Les supports de travail

Les documents, la calculatrice.

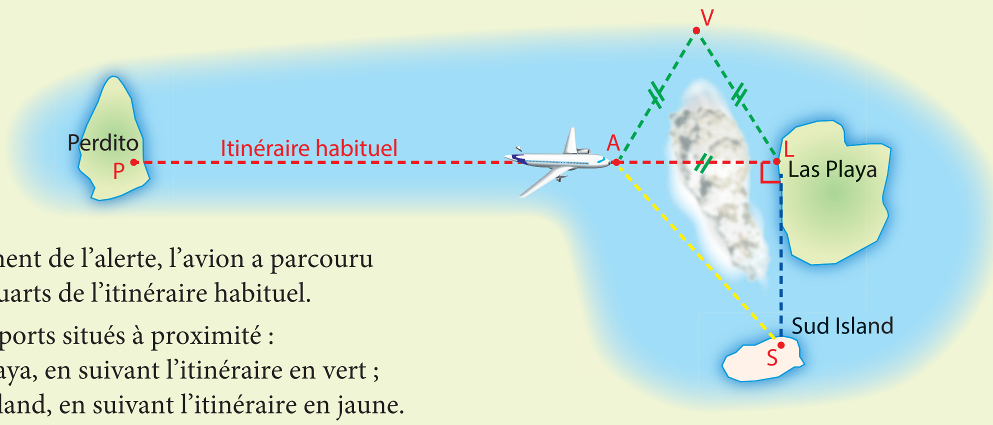
Doc. 1 : Des distances

Perdito – Las Playa : 1 920 km.
Las Playa – Sud Island : 550 km.

Doc. 2 : Le vol prévu Perdito – Las Playa

- Passagers : 140
- Heure de départ : 15 h 40
- Heure d'arrivée : 18 h 04
- Carburant au départ de Perdito : 9 000 L
- Consommation : 400 L pour 100 km

Doc. 3 : Schéma de la situation



- Au moment de l'alerte, l'avion a parcouru les trois quarts de l'itinéraire habituel.
- Les aéroports situés à proximité :
  – à Las Playa, en suivant l'itinéraire en vert ;
  – à Sud Island, en suivant l'itinéraire en jaune.

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

- $\frac{400}{100} = 4$ L et $\frac{9\,000}{4} = 2\,250$.
L'avion consomme 4 L par kilomètre.
Il peut parcourir en tout 2 250 km.
- $\frac{3}{4} \times 1\,920$ km $= 1\,440$ km
L'avion a déjà parcouru 1 440 km.
- $2 \times 1\,440$ km $= 2\,880$ km
$2\,880 > 2\,250$ donc l'avion ne peut pas faire demi-tour.
- $1\,920$ km $- 1\,440$ km $= 480$ km
L'avion est à 480 km de Las Playa.
$1\,440$ km $+ 2 \times 480$ km $= 2\,400$ km
$2\,400 > 2\,250$ donc l'avion ne peut pas se rendre à Las Playa.

- Dans le triangle ALS rectangle en L,
l'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$AS^2 = LA^2 + LS^2$
d'où $AS^2 = 480^2 + 550^2 = 532\,900$ et $AS = 730$.
L'avion est à 730 km de Sud Island.
$1\,440$ km $+ 730$ km $= 2\,170$ km
$2\,170 < 2\,250$ donc l'avion pourra se poser à Sud Island.

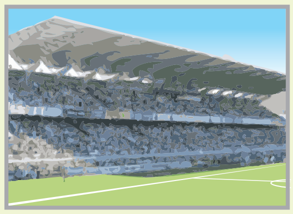
La tribune

La situation-problème

En imaginant être architecte de la future tribune, calculer la hauteur à laquelle les sièges de la deuxième rangée seront fixés.
Calculer ensuite la hauteur de la future tribune.

Doc. 1 : la tribune

- La tribune accueillera 10 000 personnes.
- Il y aura 200 personnes par rangée.



Le supports de travail

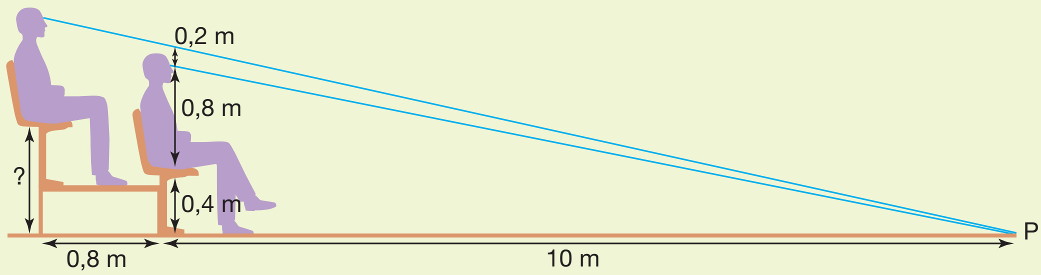
Les documents, la calculatrice ou un tableur, les instruments de géométrie.

Doc. 2 : Les règles à respecter

- Un spectateur doit pouvoir voir un point P situé horizontalement à 10 m devant lui.
- Chaque spectateur voit le même point que le spectateur placé devant lui. Le segment qui va de ses yeux à ce point est situé 0,2 m au-dessus des yeux du spectateur placé devant.
- On considère que l'œil d'un spectateur est 0,8 m au-dessus du siège.
- Il y a un espace de 0,8 m entre les sièges de deux rangées consécutives.
- Les sièges de la première rangée sont fixés à 0,4 m du sol.

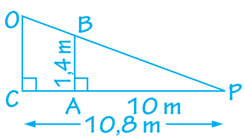
D'après *sport.maths.org*

Doc. 3 : Un schéma



Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

- On peut réaliser ce schéma où (CP) désigne le sol.



O est l'œil d'un spectateur de la 2ᵉ rangée.
$10 + 0{,}8 = 10{,}8$ et $0{,}4 + 0{,}8 + 0{,}2 = 1{,}4$
Les droites (OC) et (AB) sont perpendiculaires à (CP) donc parallèles.
Le théorème de Thalès dans les triangles PAB et POC permet d'écrire : $\frac{PA}{PC} = \frac{BA}{OC}$

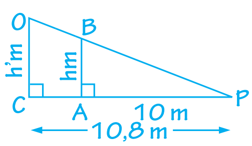
d'où $\frac{10}{10{,}8} = \frac{1{,}4}{OC}$ donc $10 \times OC = 1{,}4 \times 10{,}8$

$OC = \frac{1{,}4 \times 10{,}8}{10} = 1{,}512$.

Les yeux d'un spectateur de la 2ᵉ rangée sont à 1,512 m du sol.
1,512 m − 0,8 m = 0,712 m donc les sièges de la 2ᵉ rangée seront fixés à 0,712 m du sol.

- **Hauteur de la tribune**

$\frac{10\,000}{200} = 50$ donc il y a 50 rangées.
On note h la hauteur des yeux d'un spectateur et h' la hauteur des yeux du spectateur situé derrière lui.



Avec le théorème de Thalès, on obtient : $\frac{10}{10{,}8} = \frac{h}{h'}$

$10 \times h' = 10{,}8 \times h$ et $h' = \frac{10{,}8 \times h}{10}$ d'où $h' = 1{,}08 \times h$.

La hauteur des yeux d'un spectateur de la 50ᵉ rangée est donc $1{,}08^{49} \times 1{,}4$ m soit environ 60,8 m.
On peut estimer que la hauteur de la tribune sera environ 61 m.

Le sauvetage

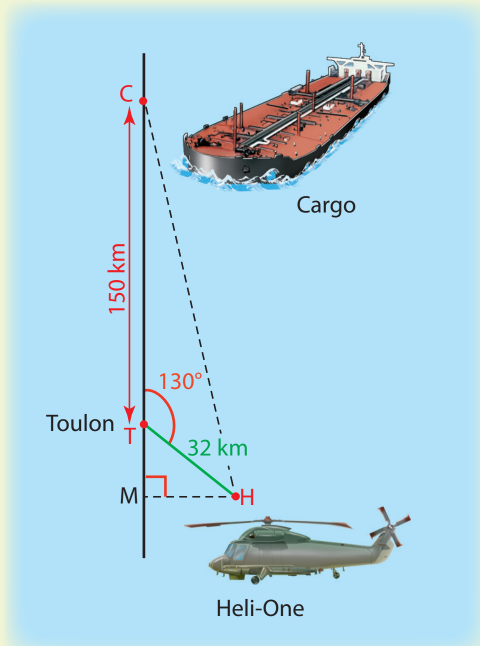
La situation-problème

Aider le responsable des sauveteurs en mer de Toulon à choisir l'hélicoptère qui doit aller secourir le blessé.

Les supports de travail

Les documents, la calculatrice, les instruments de géométrie.

Doc. 1 : Le schéma de la situation



Doc. 2 : Le résumé de la situation

À 14 h, l'hélicoptère « Heli-One » est sur le point de quitter un bateau de pêche (H) qu'il a secouru à 32 km de Toulon quand une alerte est émise : un membre d'équipage d'un cargo (C) est gravement blessé et doit être transporté à l'hôpital de Toulon (T).

Un second hélicoptère « Heli-Two » est à l'hôpital de Toulon et peut décoller dans 10 minutes.

Chaque hélicoptère a une vitesse de 250 km/h.

Une fois arrivé au-dessus d'un cargo, un hélicoptère met en moyenne 6 minutes pour hélitreuiller un blessé.

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

- **Calcul de la distance CH**

• Les points C, T et M sont alignés
donc $\widehat{MTH} = 180° - \widehat{CTH} = 180° - 130° = 50°$
Le triangle MTH est rectangle en M
donc $\widehat{THM} = 90° - \widehat{MTH} = 90° - 50° = 40°$.

• $\cos \widehat{MTH} = \dfrac{TM}{TH}$ d'où $\cos 50° = \dfrac{TM}{32}$
$TM = 32 \times \cos 50°$ et $TM \approx 20{,}6$ km.
$\cos \widehat{MHT} = \dfrac{HM}{HT}$ d'où $\cos 40° = \dfrac{HM}{32}$
$HM = 32 \times \cos 40°$ et $HM \approx 24{,}5$ km.

• $MC = MT + TC$
donc $MC \approx 20{,}6$ km $+ 150$ km.
$MC \approx 170{,}6$ km.

• Dans le triangle MHC rectangle en M, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$HC^2 = MH^2 + MC^2$
$HC^2 \approx 24{,}5^2 + 170{,}6^2$
$HC^2 \approx 29\,705$ et $HC \approx 172$ km.

- **Durées nécessaires pour atteindre le cargo**

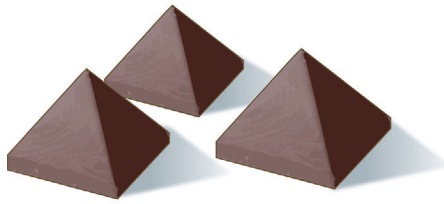
• Pour Heli-One :
$d = v \times t$ d'où $172 = 250 \times t$
donc $t = \dfrac{172}{250}$ ainsi $t \approx 0{,}69$ h
$0{,}69$ h $= 0{,}69 \times 60$ min donc $t \approx 41$ min
Heli-One mettra environ 41 min pour atteindre le cargo.

• Pour Heli-Two : $t = \dfrac{150}{250} = 0{,}6$ h
$0{,}6$ h $= 0{,}6 \times 60$ min $= 36$ min
36 min $+ 10$ min $= 46$ min.
Héli-Two mettra 46 min pour atteindre le cargo.
$41 < 46$ donc le responsable doit choisir Heli-One.

Les pyramides en chocolat

La situation-problème

Un 25 décembre, Thomas a mangé 9 pyramides en chocolat. Il vous demande combien de kilomètres il va devoir effectuer en footing pour éliminer les calories qu'il a ainsi absorbées.



Les supports de travail

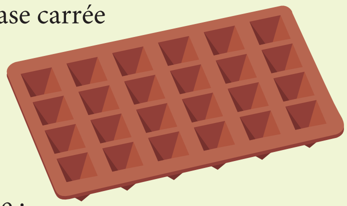
Les documents, la calculatrice.

Doc. 1 : Le chocolat

- 1 L de chocolat pèse 800 g.
- 100 g de chocolat apportent 530 kcal (kilocalories).

Doc. 2 : Le moule à pyramides

Moule de 24 pyramides à base carrée



Référence 35-001
Prix 22 €
Dimensions d'une pyramide :
L : 30 mm ; l : 30 mm ; h : 40 mm
Dimensions du moule : 275 mm × 175 mm

Doc. 3 : Une formule

Le nombre C de calories (en kcal) dépensées par une personne lors d'un footing peut se calculer avec la formule :

$$C = 1{,}047 \times M \times d$$

où M est la masse (en kg) de la personne et d la distance parcourue (en km).

Doc. 4 : Thomas et son footing

- Thomas pèse 70 kg.
- Il mesure 1,70 m.
- Quand il fait du footing, sa vitesse est environ 8 km/h.

Toute piste de recherche, même non aboutie figurera ci-dessous.

- *Calories apportées par les 9 pyramides*

• $V = \dfrac{30 \times 30 \times 40}{3} = 12\,000$

Le volume d'une pyramide est 12 000 mm³.

• $9 \times 12\,000 \text{ mm}^3 = 108\,000 \text{ mm}^3 = 108 \text{ cm}^3$.

Le volume des 9 pyramides est 108 cm³.

$1 \text{ cm}^3 = 0{,}001 \text{ dm}^3 = 0{,}001 \text{ L}$

$108 \times 0{,}001 \text{ L} = 0{,}108 \text{ L}$

Thomas a mangé l'équivalent de 0,108 L de chocolat.

$0{,}108 \times 800 = 86{,}4$

Il a mangé l'équivalent de 86,4 g de chocolat.

• 100 g de chocolat apportent 530 kcal

donc 1 g apporte $\dfrac{530}{100}$ kcal soit 5,3 kcal.

86,4 g de chocolat apportent alors $86{,}4 \times 5{,}3$ kcal.

$86{,}4 \times 5{,}3 \text{ kcal} = 457{,}92 \text{ kcal}$.

Les 9 pyramides ont apporté 457,92 kcal.

- *Distance d que Thomas doit parcourir*

$C = 1{,}047 \times M \times d$

donc ici $457{,}92 = 1{,}047 \times 70 \times d$

c'est-à-dire $457{,}92 = 73{,}29 \times d$

$d = \dfrac{457{,}92}{73{,}29}$

donc $d \approx 6{,}3$ km

Thomas devra parcourir environ 6,3 km.

Périmètre, aire et volume

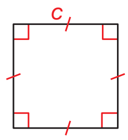
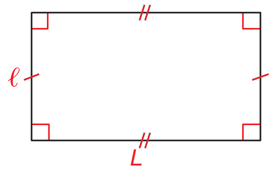
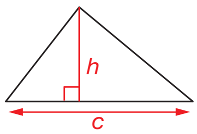
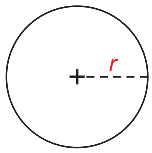
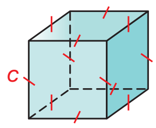
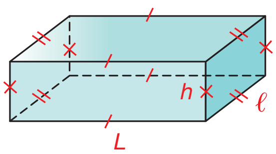
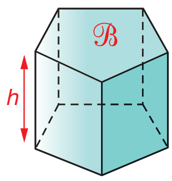
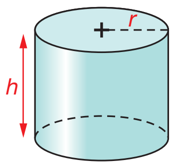
	Figure	Périmètre	Aire
Carré		$4 \times c$ ou $4c$	$c \times c$ ou c^2
Rectangle		$2 \times L + 2 \times \ell$ ou $2 \times (L + \ell)$	$L \times \ell$
Triangle		Somme des longueurs des côtés	$\dfrac{c \times h}{2}$
Cercle et disque		$2 \times \pi \times r$	$\pi \times r^2$

	Figure	Aire latérale	Volume
Cube		$4 \times c^2$ ou $4c^2$	$c \times c \times c$ ou c^3
Parallélépipède rectangle		$2 \times (L + \ell) \times h$	$L \times \ell \times h$
Prisme droit		Périmètre d'une base $\times$ hauteur	Aire d'une base $\times$ hauteur
Cylindre		$2 \times \pi \times r \times h$	$\pi \times r^2 \times h$

Conception graphique : Julie Lannes
Couverture : Frédéric Jély
Mise en pages : Soft Office
Édition : Christine Lataste
Schémas et illustration : Laurent Blondel – Corédoc