Proportionnalité. Fonction linéaire

Chapitre 9

CALCUL MENTAL	• .... • .... • .... • .... •	Note
	• .... • .... • .... • .... •	..... / .....

FICHE

54 Proportionnalité

SOCLE

- Pour calculer la quatrième proportionnelle x de ce tableau de proportionnalité, on peut utiliser :

Masse (en kg)	25	85
Prix (en €)	20	x

$x = 68$

- **l'égalité des produits en croix**

  $25 \times x = 20 \times 85$

- **un coefficient** de **proportionnalité**

Masse (en kg)	25	85
Prix (en €)	20	x

$\times 0{,}8$

- **un rapport de linéarité**

$\times 3{,}4$

Masse (en kg)	25	85
Prix (en €)	20	x

- Dans un repère, une situation de proportionnalité est représentée graphiquement par des **points alignés avec l'origine du repère.**

★

1 Pour fabriquer un parfum, on utilise 4 L d'eau de rose pour 3 L d'eau de pêche.
Une cuve contient 50 L d'eau de rose.
On se propose de déterminer la quantité d'eau de pêche qu'il faut ajouter. On note x cette quantité.

Eau de rose (en L)	4	50
Eau de pêche (en L)	3	x

Écrire l'égalité des produits en croix pour ce tableau.
En déduire la valeur de x et conclure.

$4 \times x = 50 \times 3$ donc $x = \dfrac{50 \times 3}{4} = 37{,}5$.
Il faut donc ajouter 37,5 L d'eau de pêche.

2 72 sachets identiques pèsent 18 kg.
On se propose de calculer la masse de 40 sachets.

Nombre de sachets	72	40
Masse (en kg)	18	10

$\times 0{,}25$

a. Calculer le coefficient de proportionnalité.

$18 : 72 = 0{,}25$

b. Compléter la case vide du tableau et conclure.

La masse d'un sachet est 0,25 kg.
$40 \times 0{,}25 = 10$ donc 40 sachets pèsent 10 kg.

★★

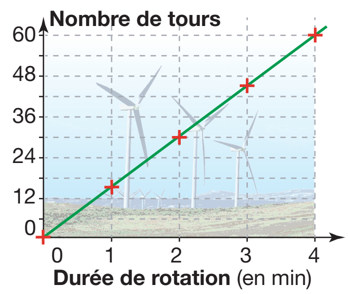
3 5 stylos identiques coûtent 4 €.
Quel est le prix de 3 de ces stylos ?

$4 € : 5 = 0{,}80 €$ et $0{,}80 € \times 3 = 2{,}40 €$.
3 stylos coûtent 2,40 €.

4 Marie prévoit 800 g de fromage pour une raclette pour 5 personnes.
Combien devra-t-elle payer pour une raclette pour 9 personnes ?

$800 g : 5 = 160 g$.
Donc Marie prévoit 160 g par personne.
$9 \times 160 g = 1\,440 g = 1{,}44 kg$.
Marie a besoin de 1,44 kg de fromage.
$1{,}44 \times 22{,}50 = 32{,}40$.
Donc Marie payera 32,40 €.

5 Ce graphique concerne les pales d'une éolienne.
Le nombre de tours est-il proportionnel à la durée de rotation ? Expliquer.



Les points sont alignés avec l'origine du repère donc le nombre de tours est proportionnel à la durée de rotation.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note ..... / .....

FICHE

55 Relier proportionnalité et fonction linéaire

● a désigne un nombre. La **fonction linéaire** de **coefficient a** est la fonction qui à un nombre x associe le nombre $a \times x$.
C'est donc la fonction $x \mapsto ax$.

● À toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire. Cette fonction linéaire modélise la situation de proportionnalité.

« On multiplie par a »

$$\underset{\text{Nombre}}{x} \xrightarrow{\times a} \underset{\text{Image}}{ax}$$

★

1 Chez un boucher, 1 kg de jambon coûte 17 €.

a. Compléter ce tableau.

Masse (en kg)	1	0,4	1,4	0,5
Prix (en €)	17	6,80	23,80	8,50

b. On note p la fonction qui à x (en kg) associe le prix à payer (en €).
Donner l'expression de $p(x)$.

$p(x) = 17x$.

c. La fonction p est-elle linéaire ? Expliquer.

Pour calculer l'image d'un nombre, on multiplie ce nombre par 17 donc p est la fonction linéaire de coefficient 17.

2 Un avion se déplace à la vitesse constante de 180 m/s.

1. Compléter ce tableau.

Durée (en s)	0	3	25
Distance (en m)	0	540	4 500

2. a. On note $d(t)$ la distance (en m) parcourue pendant une durée t (en s).
Exprimer $d(t)$ en fonction de t.

b. d est-elle une fonction linéaire ? Expliquer.

c. Calculer $d(45)$. Interpréter le résultat.

a. $d(t) = 180t$

b. Pour calculer l'image d'un nombre, on multiplie ce nombre par 180 donc d est la fonction linéaire de coefficient 180.

c. $d(45) = 180 \times 45 = 8\,100$.
L'avion parcourt 8 100 m en 45 s.

★★

3 Dire si la fonction f peut être linéaire ou non. Si oui, donner son coefficient.

a.

x	2	4	10
$f(x)$	3,5	7	17,5

b.

x	0	3	5
$f(x)$	4	7,2	12

a. $\frac{3,5}{2} = \frac{7}{4} = \frac{17,5}{10} = 1,75$ donc f peut être la fonction linéaire de coefficient 1,75.

b. L'image de 0 n'est pas 0 donc f ne peut pas être une fonction linéaire.

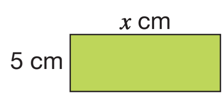
4 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Multiplier par 0,2.
- Ajouter le nombre choisi.

On note x le nombre choisi et $f(x)$ le nombre obtenu. La fonction f est-elle linéaire ? Justifier.

• x • $0,2x$ • $0,2x + x = 1,2x$
$f(x) = 1,2x$ donc f est la fonction linéaire de coefficient 1,2.

5 P(x) désigne le périmètre (en cm) et A(x) l'aire (en cm²) de ce rectangle ($x \geqslant 0$).



a. Compléter ce tableau.

x	7	13	20	9
P(x)	24	36	50	28
A(x)	35	65	100	45

b. Donner les expressions de P(x) et A(x).
Les fonctions P et A sont-elles linéaires ?

$P(x) = 2(x + 5) = 2x + 10$ et $A(x) = 5x$.
Seule la fonction A est linéaire.

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

56 Calculer une image, un antécédent

★

1 f est la fonction linéaire telle que $f(x) = 5x$.

a. On se propose de calculer l'image de 7 par f. Compléter.

On remplace x par ..7.. dans l'égalité $f(x) = 5x$.

$f($..7..$) = 5 \times$ ..7.. = ..35.. donc l'image de 7 est ..35.. .

b. Calculer l'image de −3 par f.

$f(-3) = 5 \times (-3) = -15$

donc l'image de −3 est −15.

2 g est la fonction linéaire telle que $g(x) = -0{,}4x$.
Calculer : **a.** l'image de 9 **b.** $g(-0{,}6)$.

a. $g(9) = -0{,}4 \times 9 = -3{,}6$ donc l'image de 9 est −3,6.

b. $g(-0{,}6) = -0{,}4 \times (-0{,}6) = 0{,}24$.

3 f est la fonction linéaire telle que $f(x) = 8x$.

a. Compléter : « Calculer l'antécédent de 20 par f revient à chercher un nombre x tel que :

$f(x) =$ ..20.. c'est-à-dire un nombre dont le produit par ..8.. est égal à ..20.. ».

b. Voici deux méthodes pour calculer l'antécédent de 20. Compléter puis conclure.

$$\text{..2,5..} \underset{:8}{\overset{\times 8}{\rightleftarrows}} 20$$

$8x =$ ..20..

$\dfrac{8x}{8} = \dfrac{20}{8}$

$x =$ ..2,5..

L'antécédent de 20 est ......2,5...................... .

c. Calculer de même l'antécédent de −6 par f.

$$-0{,}75 \underset{:8}{\overset{\times 8}{\rightleftarrows}} -6$$

$8x = -6$

$\dfrac{8x}{8} = \dfrac{-6}{8}$

$x = -0{,}75$

L'antécédent de −6 est −0,75.

★★

4 Louise a répondu à des questions concernant la fonction linéaire f telle que $f(x) = 3{,}2x$.
Retrouver les questions posées à Louise.

a. $3{,}2 \times 6 = 19{,}2$ b. $\dfrac{28}{3{,}2} = 8{,}75$

a. Calculer l'image de 6 par f.
b. Calculer l'antécédent de 28 par f.

5 Compléter ce tableau sachant que f est la fonction linéaire telle que $f(x) = 1{,}6x$.

Antécédent	5	12,5	3,5	−0,25
Image	8	20	5,6	−0,4

× 1,6

6 g est la fonction linéaire telle que $g(x) = \dfrac{7}{3}x$.
Calculer :

a. l'image de 12 **b.** l'antécédent de 63.

a. $g(12) = \dfrac{7}{3} \times 12 = \dfrac{7 \times 4 \times 3}{3} = 28$.
Donc l'image de 12 est 28.

b. $g(x) = 63$ donc x est le nombre tel que $\dfrac{7}{3}x = 63$.
D'où $\dfrac{3}{7} \times \dfrac{7}{3}x = \dfrac{3}{7} \times 63$ ainsi $x = 27$.
Donc l'antécédent de 63 est 27.

7 f est la fonction linéaire telle que $f(x) = 0{,}2x$.
Diego affirme : « L'image de 40 est aussi l'antécédent de 1,6 ». A-t-il raison ?

• $f(40) = 0{,}2 \times 40 = 8$. L'image de 40 est 8.
• $f(8) = 0{,}2 \times 8 = 1{,}6$ donc 8 est l'antécédent de 1,6. Diego a raison.

8 Compléter ce circuit de nombres sachant que :
• f est la fonction linéaire de coefficient 2,5 ;
• g est la fonction linéaire telle que $g(x) = -0{,}8x$.

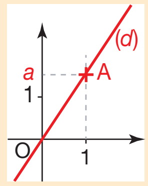
$$\begin{array}{ccccc} 6 & \xrightarrow{f} & 15 & \xrightarrow{f} & 37{,}5 \\ \uparrow g & & & & \\ -7{,}5 & \xleftarrow{f} & -3 & \xleftarrow{g} & 3{,}75 \end{array}$$

FICHE

57 Représenter graphiquement une fonction linéaire

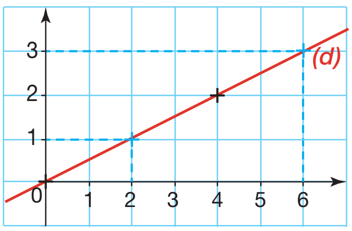
Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $x \mapsto ax$ est la droite constituée de tous les points de coordonnées $(x\ ;\ ax)$.

- Cette droite passe par O **l'origine du repère** et par le point A de coordonnées $(1\ ;\ a)$.
- Le nombre a est le **coefficient directeur** de la droite (OA).



★

1 Dans ce repère, la droite (d) représente une fonction f.



1. Pourquoi f est-elle une fonction linéaire ?

La représentation de f est une droite qui passe par l'origine du repère donc f est une fonction linéaire.

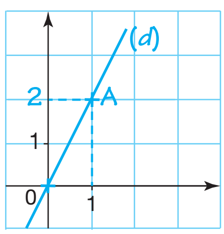
2. Compléter.

a. L'image de 2 est 1. **b.** L'antécédent de 3 est 6.

2 On désire tracer la droite (d) qui représente la fonction linéaire f définie par $f(x) = 2x$.

a. Compléter :
$f(1) = 2$ donc (d) passe par le point A(1 ; 2).

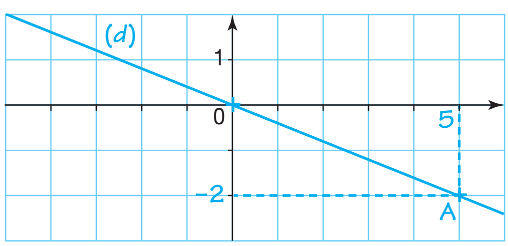
b. Placer le point A puis tracer la droite (d).



3 On désire tracer la droite (d) qui représente la fonction linéaire g définie par $g(x) = -0,4x$.

a. Compléter :
$g(5) = -2$ donc (d) passe par le point A(5 ; −2).

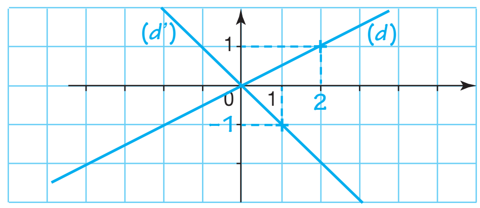
b. Placer le point A puis tracer la droite (d).



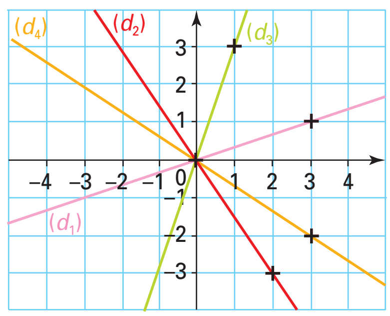
★★

4 Tracer les représentations graphiques (d) et (d') des fonctions f et g telles que :

$f(x) = 0,5x$ et $g(x) = -x$.



5 (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) représentent quatre fonctions linéaires f, g, h et i.
Indiquer la droite qui représente chaque fonction.



- $f(x) = 3x$ ....(d_3).....
- $g(x) = -1,5x$ ....(d_2).....
- $h(x) = \dfrac{1}{3}x$ ..(d_1).....
- $i(x) = -\dfrac{2}{3}x$ .....(d_4).....

6 Une droite (d) représente la fonction linéaire f telle que $f(x) = 6,4x$.

a. Les points M(5 ; 32) et N(7 ; 44,4) appartiennent-ils à la droite (d) ? Justifier.

b. Les points C(2,5 ; y) et D(x ; 22,4) sont deux points de la droite (d). Déterminer x et y.

a. • $6,4 \times 5 = 32$ donc M(5 ; 32) appartient à (d).
• $6,4 \times 7 = 44,8$ et $44,8 \neq 44,4$ donc N(7 ; 44,4) n'appartient pas à (d).

b. • $y = 6,4 \times 2,5 = 16$.
• $6,4 \times x = 22,4$ d'où $x = \dfrac{22,4}{6,4} = 3,5$.

FICHE

58 Déterminer une fonction linéaire

Déterminer l'expression de $f(x)$ c'est écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax$.

★

1 On se propose de déterminer la fonction linéaire f telle que $f(6) = 27$.
Compléter.

f est une fonction ....linéaire..... donc $f(x) =$ ..ax.. .

$f($..6..$) = 27$ donc $a \times$ ..6.. $=$ ..27.. et $a = \frac{27}{6} =$ ..4,5.. .

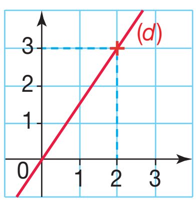
Donc $f(x) =$ ..$4{,}5x$.. .

2 g et h sont deux fonctions linéaires telles que :
- $g(5) = -4$;
- l'image de 7 par h est 12.

Déterminer les expressions de $g(x)$ et $h(x)$.

• g est une fonction linéaire donc $g(x) = ax$.
$g(5) = -4$ donc $a \times 5 = -4$ et $a = \frac{-4}{5} = -0{,}8$
Donc $g(x) = -0{,}8x$.
• h est une fonction linéaire donc $h(x) = ax$.
$h(7) = 12$ d'où $a \times 7 = 12$ et $a = \frac{12}{7}$.
Donc $h(x) = \frac{12}{7}x$.

3 Dans ce repère, la droite (d) représente une fonction linéaire f.



a. Compléter.
L'image de 2 est ..3.. .

b. Déterminer la fonction linéaire f.

f est une fonction linéaire donc $f(x) = ax$.
$f(2) = 3$ donc $a \times 2 = 3$ et $a = 1{,}5$.
Donc $f(x) = 1{,}5x$.

4 Dans un repère, la représentation (d) de la fonction linéaire g passe par le point A(6 ; 57).
Déterminer l'expression de $g(x)$.

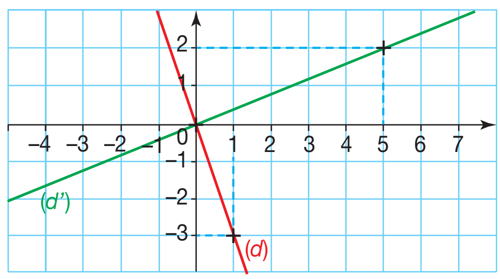
(d) passe par A(6 ; 57) donc $g(6) = 57$.
g est une fonction linéaire donc $g(x) = ax$.
$g(6) = 57$ donc $a \times 6 = 57$ et $a = \frac{57}{6} = 9{,}5$.
Donc $g(x) = 9{,}5x$.

★★

5 L'antécédent de -6 par une fonction linéaire f est -8. Calculer $f(12)$.

f est une fonction linéaire donc $f(x) = ax$.
$f(-8) = -6$ donc $a \times (-8) = -6$ et $a = \frac{-6}{-8} = 0{,}75$.
Donc $f(x) = 0{,}75x$.
Alors $f(12) = 0{,}75 \times 12 = 9$.

6 Les droites (d) et (d') représentent deux fonctions linéaires, respectivement f et g.
Donner les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.

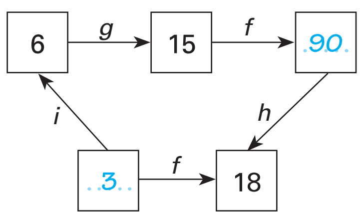


• $f(1) = -3$ donc $f(x) = -3x$
• $g(5) = 2$ donc $a \times 5 = 2$ et $a = \frac{2}{5} = 0{,}4$.
Donc $g(x) = 0{,}4x$.

7 f est la fonction linéaire de coefficient 6.
g, h et i sont des fonctions linéaires.

a. Compléter ce circuit de nombres.

b. Donner les expressions de $g(x)$, $h(x)$ et $i(x)$.



$g(6) = 15$ donc $g(x) = 2{,}5x$.
$h(90) = 18$ donc $h(x) = 0{,}2x$.
$i(3) = 6$ donc $i(x) = 2x$.

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • ....

Note ..... / .....

FICHE

59 Fonctions linéaires et pourcentages

	Prendre 5 % de x c'est multiplier x par **0,05**	Augmenter x de 5 % c'est multiplier x par **1,05**	Diminuer x de 5 % c'est multiplier x par **0,95**
Expression littérale	$\frac{5}{100}x = \mathbf{0{,}05x}$	$x + \frac{5}{100}x = \left(1+\frac{5}{100}\right)x = \mathbf{1{,}05x}$	$x - \frac{5}{100}x = \left(1-\frac{5}{100}\right)x = \mathbf{0{,}95x}$
Fonction linéaire	$x \mapsto \mathbf{0{,}05x}$ (coefficient **0,05**)	$x \mapsto \mathbf{1{,}05x}$ (coefficient **1,05**)	$x \mapsto \mathbf{0{,}95x}$ (coefficient **0,95**)

★

1 Compléter.

a. $1 + \frac{7}{100} =$ 1,07 $1 - \frac{7}{100} =$ 0,93

b. Augmenter un prix de 7 % revient à le multiplier par 1,07.

c. Diminuer un prix de 7 % revient à le multiplier par 0,93.

2 **a.** Compléter : $1 + \frac{2}{100} =$ 1,02

Augmenter une quantité de 2 % revient à la multiplier par 1,02.

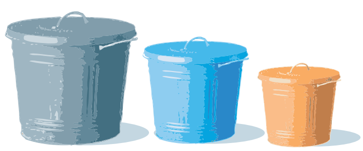
b. Cette semaine, le nombre de personnes qui visionnent une vidéo augmente chaque jour de 2%. Mardi 7 650 personnes ont visionné cette vidéo. Compléter ce tableau.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi
Nombre de personnes	7 500	7 650	7 803

: 1,02   × 1,02

3 **a.** Compléter : $1 - \frac{20}{100} =$ 0,8. Diminuer une quantité de 20 % revient à la multiplier par 0,8.

b. Une famille qui a produit 300 kg de déchets ménagers en 2013 réduit chaque année ses déchets ménagers de 20 %.



Compléter ce tableau.

Année	2012	2013	2014
Masse de déchets (en kg)	375	300	240

: 0,8   × 0,8

★★

4 Dans chaque cas, déterminer la fonction linéaire f correspondant à la situation.

Réponse	Calcul
a. Prendre 40 % de x. $f(x) =$ 0,4x	$\frac{40}{100} = 0{,}4$
b. Diminuer x de 13 %. $f(x) =$ 0,87x	$1 - \frac{13}{100} = 0{,}87$
c. Augmenter x de 30 %. $f(x) =$ 1,3x	$1 + \frac{30}{100} = 1{,}3$

5 En 2009 les magasins français ont distribué 1,062 milliard de sacs plastiques.
Le nombre de sacs plastiques distribués a diminué de 90 % entre 2002 et 2009 et de 35 % entre 2009 et 2012.

a. Combien de sacs plastiques ont été distribués
• en 2012 ?   • en 2002 ?

b. Exprimer la diminution de sacs plastiques distribués entre 2002 et 2012 en pourcentage.

a. • $1 - \frac{35}{100} = 0{,}65$ • $1 - \frac{90}{100} = 0{,}1$

$1{,}062 \times 0{,}65 = 0{,}690\,3$ $1{,}062 : 0{,}1 = 10{,}62$

Année	2002	2009	2012
Nombre de sacs (en milliards)	10,62	1,062	0,690 3

: 0,1   × 0,65

0,690 3 milliard de sacs ont été distribués en 2012 et 10,62 milliards l'ont été en 2002.

b. $10{,}62 - 0{,}690\,3 = 9{,}929\,7$

$\frac{9{,}929\,7}{10{,}62} = 0{,}935$

Entre 2002 et 2012 le nombre de sacs plastiques distribués a diminué de 93,5 %.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● .... **Note** ..... / .....

FICHE

60 Grandeurs composées

SOCLE

● L'aire d'un rectangle est une **grandeur produit**.

$$\underset{m^2}{\mathcal{A}} = \underset{m}{L} \times \underset{m}{\ell}$$

m^2 $m \times m$

● La vitesse moyenne est une **grandeur quotient**.

$$v = \frac{d}{t} \rightarrow \frac{km}{h}$$

km/h

★

1 Convertir en m².

a. 784 dm² = 7,84 m² **b.** 2,5 dam² = 250 m²

c. 3 hm² = 30 000 m² **d.** 740 cm² = 0,074 m²

2 Convertir en m³.

a. 826 dm³ = 0,826 m³ **b.** 75 dam³ = 75 000 m³

c. 0,6 hm³ = 600 000 m³ **d.** 1800 cm³ = 0,0018 m³

3 Une voiture a parcouru 135 km en 2 h 30 min.

a. Calculer sa vitesse moyenne v en km/h.

2 h 30 min = 2,5 h

$v = \frac{d}{t} = \frac{135 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} = 54 \text{ km/h}$

b. Compléter pour convertir v en m/s.

$v = 54 \text{ km/h} = \frac{54 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{54\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 15 \text{ m/s}$

4 Une infirmière perfuse 1,5 L de solution en 10 h.

a. Exprimer le débit d de cette perfusion en L/h.

$d = \frac{1,5 \text{ L}}{10 \text{ h}} = 0,15 \text{ L/h}$

b. Exprimer ce débit d en mL/min.

$d = \frac{0,15 \text{ L}}{1 \text{ h}} = \frac{150 \text{ mL}}{60 \text{ min}} = 2,5 \text{ mL/min}$

c. 1 mL de cette solution correspond à 20 gouttes. Exprimer d en gouttes/min.

$d = \frac{2,5 \text{ mL}}{1 \text{ min}} = \frac{2,5 \times 1 \text{ mL}}{1 \text{ min}} = \frac{2,5 \times 20 \text{ gouttes}}{1 \text{ min}}$

$d = \frac{50 \text{ gouttes}}{1 \text{ min}}$ donc $d = 50$ gouttes/min.

★★

5 La formule E = P × t permet de calculer l'énergie électrique E en kWh (kilowattheure), consommée par un appareil de puissance P kilowatts qui fonctionne pendant t heures.
Calculer l'énergie consommée par ces appareils.

2 h 30 min	15 h	8 h
1,4 kW	12 W	100 W

• Four : P = 1,4 kW × 2,5 h = 3,5 kWh
• Ampoule : 12 W = 0,012 kW
P = 0,012 kW × 15 h = 0,18 kWh
• Téléviseur : 100 W = 0,1 kW
P = 0,1 kW × 8 h = 0,8 kWh

6 Voici des renseignements sur le vol d'un avion.

Distance : 8 000 km
Passagers : 320
Carburant : 92 160 L
CO_2 émis : 230,4 t

Calculer pour un passager de ce vol :

a. sa consommation de carburant en L/100 km ;

b. ses émissions de CO_2 en g/km.

a. $\frac{92\,160}{320} = 288$ et $\frac{288}{80} = 3,6$
La consommation par passager est 3,6 L/100 km.

b. 230,4 t = 230 400 000 g

$\frac{230\,400\,000}{320 \times 8\,000} = 90$ g/km.

L'émission de CO_2 pour un passager est 90 g/km.

OBJECTIF BREVET

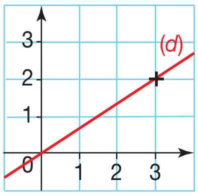
Sélection de sujets de Brevet

★★

QCM

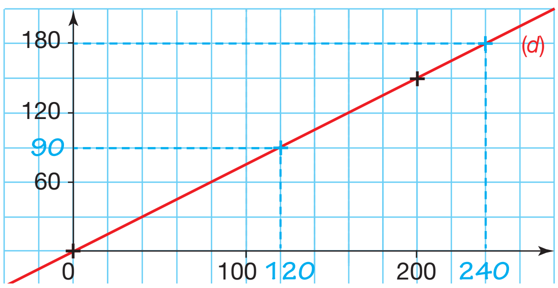
Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

Note ..... / 5

A	800 g de fromage coûtent 20 €. On peut en déduire que…	1 kg de ce fromage coûte 25 €	avec 15 €, on a 600 g de ce fromage	le prix p (en €) à payer pour x kg est $p(x) = 25x$
B	f est la fonction linéaire telle que $f(x) = 4x$. Alors…	l'image de 6 est 24	l'antécédent de 20 est 5	l'antécédent de 48 est aussi l'image de 3
C	g est la fonction linéaire telle que $g(10) = 8$. Alors…	$g(x) = 0{,}8x$	$g(x) = 1{,}25x$	$g(6) = 4{,}8$
D	(d) est la représentation graphique d'une fonction linéaire f. Alors… 	l'antécédent de 2 est 3	$f(x) = \frac{2}{3}x$	le point M(36 ; 24) appartient à la droite (d)
E	Pour parcourir 800 m à la vitesse moyenne de 40 km/h, on met…	1,2 min	1 min 20 s	1 min 12 s

1 ▸ *Lire un graphique*

La droite (d) représente une fonction f.



1. Pourquoi la fonction f est-elle linéaire ?

2. Lire sur le graphique :

a. l'image de 120 **b.** l'antécédent de 180.

3. Donner l'expression de $f(x)$.

4. Le point M(420 ; 315) appartient-il à (d) ? Justifier.

D'après *DNB*

1. La droite (d) passe par l'origine du repère donc f est une fonction linéaire.

2. a. L'image de 120 est 90.

b. L'antécédent de 180 est 240.

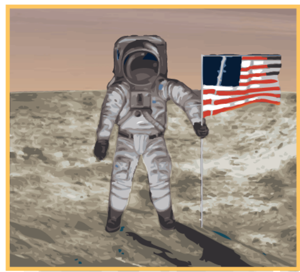
3. f est une fonction linéaire donc $f(x) = ax$.

$f(120) = 90$ d'où $a \times 120 = 90$

$a = \frac{90}{120} = 0{,}75$ donc $f(x) = 0{,}75x$.

4. $f(420) = 0{,}75 \times 420 = 315$ donc le point M(420 ; 315) appartient à (d).

2 ▸ *Reconnaître la proportionnalité*



Le poids P (en Newton) d'un corps sur un astre, c'est-à-dire la force que l'astre exerce sur ce corps, dépend de sa masse m (en kg) et de l'accélération g de la pesanteur.

On a la relation : $P = mg$.

Correspondance poids-masse sur la Lune :

Masse (en kg)	3	10	25	40	55
Poids (en N)	5,1	17	42,5	68	93,5

a. S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ?

b. Calculer l'accélération de la pesanteur sur la Lune, notée g_L.

c. Sur Terre, l'accélération de la pesanteur de la Terre, notée g_T, est environ de 9,8. Est-il vrai que l'on pèse environ 6 fois moins lourd sur la Lune que sur la Terre ?

D'après *DNB*

a. $\frac{5{,}1}{3} = \frac{17}{10} = \frac{42{,}5}{25} = \frac{68}{40} = \frac{93{,}5}{55} = 1{,}7$

donc il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

b. D'après la question a. $g_L = 1{,}7$.

c. $9{,}8 : 1{,}7 \approx 5{,}8$ donc c'est vrai.

3 ▶ Comprendre des factures

Un club de voile organise un stage pendant les vacances.
Le prix d'un stage pour un enfant est de 115 €.
Lorsqu'une famille inscrit deux enfants ou plus, elle bénéficie d'une réduction qui dépend du nombre d'enfants inscrits.

a. Une famille qui inscrit trois enfants paie 310,50 €. Pour cette famille, quel est, par enfant, le prix de revient d'un stage ?

> **a.** 310,50 € : 3 = 103,50 €
> Le prix d'un stage par enfant est 103,50 €.

b. Compléter les deux factures données ci-dessous.
Aucune justification n'est attendue.

Facture 1

Prix d'un stage	115 €
Nombre d'enfants inscrits	2
Prix total avant réduction	230 €
Montant de la réduction (5 % du prix total avant la réduction)	11,50 €
Prix à payer	218,50 €

Facture 2

Prix d'un stage	115 €
Nombre d'enfants inscrits	3
Prix total avant réduction	345 €
Montant de la réduction (10 % du prix total avant la réduction)	34,50 €
Prix à payer	310,50 €

D'après *DNB*

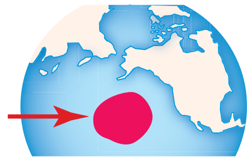
4 ▶ Vrai ou faux ?

« Durant les soldes, si on baisse le prix d'un article de 30 % puis de 20 %, au final le prix de l'article a baissé de 50 % ».
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

D'après *DNB*

> On choisit un prix, par exemple 100 €.
> 100 € × 0,7 = 70 € puis 70 € × 0,8 = 56 €
> Après les deux baisses successives, l'article ne coûte plus que 56 €, ce n'est pas la moitié du prix initial. Donc c'est faux.

5 ▶ Interpréter une augmentation



Dans l'océan Pacifique Nord, des déchets plastiques flottants se sont accumulés pour constituer une poubelle géante qui est, aujourd'hui, grande comme 6 fois la France.

a. La superficie de la France est environ 550 000 km². Quelle est la superficie actuelle de cette poubelle géante ?

b. La superficie de cette poubelle géante augmente chaque année de 10 %.
Quelle sera sa superficie dans un an ?

c. Que pensez-vous de l'affirmation : « Dans 4 ans, la superficie de cette poubelle aura doublé. » ?

D'après *DNB*

> **a.** $6 \times 550\,000$ km² $= 3\,300\,000$ km².
> Donc la superficie actuelle de cette poubelle géante est 3 300 000 km².
> **b.** Augmenter une quantité de 10 % revient à la multiplier par $1 + \frac{10}{100}$ c'est-à-dire par 1,1.
> $1{,}1 \times 3\,300\,000$ km² $= 3\,630\,000$ km²
> Sa superficie dans un an sera 3 630 000 km².
> **c.** Chaque année la superficie de la poubelle est multipliée par 1,1.
> Dans 4 ans cette superficie aura donc été multipliée par $1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1$ c'est-à-dire par $1{,}1^4$ soit 1,464 1.
> $1{,}464\,1 < 2$ donc l'affirmation est fausse.

6 ▶ Calculer une vitesse

Le Rover Curiosity de la NASA a atterri sur la planète Mars le 6 août 2012, après avoir parcouru une distance d'environ 560 millions de km en 255 jours.

a. Quelle a été la durée (en h) du vol ?

b. Calculer la vitesse moyenne du Rover en km/h. Arrondir à la centaine.

D'après *DNB*

> **a.** $255 \times 24 = 6\,120$.
> Donc le vol a duré 6 120 h.
> **b.** $v = \frac{d}{t} = \frac{560\,000\,000 \text{ km}}{6\,120 \text{ h}}$
> donc $v \approx 91\,500$ km/h
> La vitesse moyenne du Rover était environ 91 500 km/h.

FICHE

62 Perfectionnement

★★★

1 Dans un repère d'origine O, le point A a pour coordonnées (–53,6 ; 281,4) et le point B a pour coordonnées (1 024 ; –5 376).
Peut-on savoir si les points O, A et B sont alignés ? Si oui comment ?

Les points O, A et B sont alignés si le graphique représente une situation de proportionnalité, c'est-à-dire si ce tableau est un tableau de proportionnalité.

x	–53,6	1 024
y	281,4	–5 376

$-53{,}6 \times (-5\,376) = 288\,153{,}6$
$281{,}4 \times 1\,024 = 288\,153{,}6$
Les produits en croix sont égaux donc ce tableau est un tableau de proportionnalité et les points O, A et B sont alignés.

2 Voici des informations sur le périple de Sophie qui va de Vienne à Montpellier.

a. Calculer la vitesse moyenne de Sophie en km/h puis en m/s.

b. À cette vitesse et avec une pause de 30 min, à quelle heure Sophie arrivera-t-elle à Montpellier ?

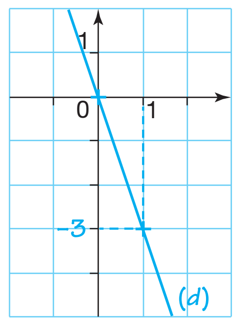
a. 288 km – 162 km = 126 km
17 h 05 – 15 h 20 = 1 h 45 min = 1,75 h
Sophie a parcouru 126 km en 1,75 h.
$v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{126\text{ km}}{1{,}75\text{ h}} = 72\text{ km/h}$
$v = \dfrac{72\text{ km}}{1\text{ h}} = \dfrac{72\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = 20\text{ m/s}$
La vitesse moyenne est 72 km/h ou 20 m/s.
b. $d = v \times t$ d'où $162 = 72 \times t$.
Ainsi $t = \dfrac{162}{72} = 2{,}25\text{ h} = 2\text{ h }15\text{ min}$
17 h 05 + 30 min + 2 h 15 min = 19 h 50
Sophie arrivera à Montpellier à 19 h 50.

3 f est la fonction telle que :
$$f(x) = (x - 12)(x - 3) - (x - 6)^2.$$

1. Camille affirme : « f est une fonction linéaire ».
Êtes-vous d'accord avec elle ? Justifier.

$f(x) = x^2 - 3x - 12x + 36 - (x^2 - 12x + 36)$
$f(x) = x^2 - 3x - 12x + 36 - x^2 + 12x - 36$
$f(x) = -3x$
Donc f est la fonction linéaire de coefficient –3.
Camille a raison.

2. a. Dans le repère ci-contre tracer la représentation graphique (d) de la fonction f.



b. A est le point de (d) d'ordonnée 20.
Quelle est son abscisse ?

c. B est le point de (d) d'abscisse $\dfrac{35}{3}$.
Quelle est son ordonnée ?

b. On note x l'abscisse du point A. $-3x = 20$
donc $x = -\dfrac{20}{3}$. L'abscisse de A est $-\dfrac{20}{3}$.
c. On note y l'ordonnée du point B.
$y = -3 \times \dfrac{35}{3} = -35$. L'ordonnée de B est –35.

4 Trois amis, Ali, Ben et Carl ont loué pour 1274 € un studio à la mer. Ali l'a utilisé les cinq premiers jours, Ben les sept jours suivants et Carl les deux derniers jours. Chacun paie une part proportionnelle à son temps d'occupation.
Calculer la part de chacun.

On note a la part d'Ali, b celle de Ben et c celle de Carl.
$\dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{7} = \dfrac{c}{2} = \dfrac{a+b+c}{5+7+2} = \dfrac{1274}{14} = 91$
$a = 91 \times 5 = 455$ $\quad b = 91 \times 7 = 637$
$c = 91 \times 2 = 182$
Ali paie 455 €, Ben 637 € et Carl 182 €.

Fonctions affines

Chapitre 10

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

63 Reconnaître une fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction qui à un nombre x associe le nombre $ax + b$ avec a et b nombres donnés.
Pour calculer l'image du nombre x par la fonction affine $x \mapsto ax + b$, on multiplie x par a, puis on ajoute b.

$$x \xrightarrow{\times a} ax \xrightarrow{+b} ax + b$$

★

1 f est la fonction définie par $f(x) = 4x + 7$.

a. Compléter ce programme de calcul.

$$x \xrightarrow{\times 4} 4x \xrightarrow{+7} 4x + 7$$

b. Compléter : « Pour calculer l'image d'un nombre par la fonction f, on multiplie ce nombre par 4 puis on ajoute 7 ».

c. La fonction f est-elle affine ? Oui
Si oui préciser les valeurs de a et b.

$a = 4$ et $b = 7$

2 Les fonctions ci-dessous sont de la forme $x \mapsto ax + b$.
Dans chaque cas, donner les valeurs de a et de b.

a. $f(x) = 3x + 4$. $a = 3$. $b = 4$.

b. $g(x) = -5 + x$. $a = 1$. $b = -5$.

c. $h(x) = 3 - 2x$. $a = -2$. $b = 3$.

d. $i(x) = 7x$. $a = 7$. $b = 0$.

e. $j(x) = 13$. $a = 0$. $b = 13$.

f. $k(x) = \frac{x}{3} + 8$ $a = \frac{1}{3}$. $b = 8$.

3 g est la fonction définie par $g(x) = 6x^2 - 11$.

a. Compléter ce programme de calcul.

$$x \xrightarrow{\times x} x^2 \xrightarrow{\times 6} 6x^2 \xrightarrow{-11} 6x^2 - 11$$

b. La fonction g est-elle affine ? Non
Justifier.

C'est x^2 et non pas x qui est multiplié par 6.

★★

4 Pour chaque programme de calcul ci-dessous :

P_1 : Ajouter 7 puis multiplier par 3.

P_2 : Soustraire 12 puis diviser par 2.

a. Déterminer l'expression de l'image $g(x)$ d'un nombre x choisi.

b. Dire si la fonction g est affine ou non.

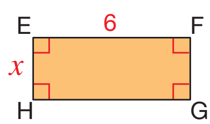
P_1

a. • x • $x+7$ • $3(x+7)$
$3(x+7) = 3x + 21$ d'où $g(x) = 3x + 21$.
b. g est une fonction affine avec $a = 3$ et $b = 21$.

P_2

a. • x • $x - 12$ • $\frac{x-12}{2}$
$\frac{x-12}{2} = \frac{1}{2}(x-12) = \frac{1}{2}x - 6$
Donc $g(x) = \frac{1}{2}x - 6$.
b. g est une fonction affine avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -6$.

5 x est un nombre positif.
EFGH est un rectangle.
On note $P(x)$ son périmètre et $A(x)$ son aire.



Les fonctions P et A sont-elles affines ? linéaires ? Expliquer.

• $P(x) = 2(x + 6)$ d'où $P(x) = 2x + 12$.
P est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = 12$.
P n'est pas une fonction linéaire ($b \neq 0$).
• $A(x) = 6x$
A est une fonction affine avec $a = 6$ et $b = 0$.
Donc A est aussi une fonction linéaire.

FICHE

64 Calculer une image, un antécédent

★

1 f est la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 8$.

1. Compléter :

$f(5) = 3 \times 5 - 8 = 15 - 8 = 7$

Donc l'image de 5 par la fonction f est 7.

2. Calculer :

a. $f(10)$ **b.** l'image de -9 par f.

a. $f(10) = 3 \times 10 - 8 = 30 - 8 = 22.$
b. $f(-9) = 3 \times (-9) - 8 = -27 - 8 = -35.$
Donc l'image de -9 est -35.

3. Zoé affirme : « -5 est l'image de 0 ».
A-t-elle raison ?

$f(0) = 3 \times 0 - 8 = -8$. Zoé se trompe.

2 g est la fonction affine définie par $g(x) = 5x + 7$.

a. Pour déterminer l'antécédent de 4, Lilou a fait un schéma et Tim a écrit une équation.
Terminer leurs travaux puis conclure.

Lilou

$$-0{,}6 \xrightarrow{\times 5} -3 \xrightarrow{+7} 4$$
$$-0{,}6 \xleftarrow{:5} -3 \xleftarrow{-7} 4$$

Tim

$g(x) = 4$
$5x + 7 = 4$
$5x = 4 - 7$
$5x = -3$
$x = \frac{-3}{5}$

L'antécédent de 4 est $-\frac{3}{5}$ c'est-à-dire $-0{,}6$.

b. Calculer l'antécédent de 13, à la manière de Lilou et à la manière de Tim.

$$1{,}2 \xrightarrow{\times 5} 6 \xrightarrow{+7} 13$$
$$1{,}2 \xleftarrow{:5} 6 \xleftarrow{-7} 13$$

$g(x) = 13$
$5x + 7 = 13$
$5x = 13 - 7$
$5x = 6$
$x = \frac{6}{5}$

L'antécédent de 13 est $\frac{6}{5}$ ou 1,2.

★★

3 h est la fonction affine définie par $h(x) = 4x + 12$.
Que calcule-t-on lorsque l'on écrit :

a. $4 \times 7 + 12$? **b.** $4x + 12 = 20$?

a. On calcule l'image de 7 par la fonction h.
b. On cherche l'antécédent de 20.

4 f est la fonction affine définie par :
$f(x) = -0{,}5x + 3$.
Déterminer :

a. l'image de 8 **b.** l'antécédent de 12

a. $f(8) = -0{,}5 \times 8 + 3 = -4 + 3 = -1.$
Donc l'image de 8 est -1.
b. On résout l'équation : $f(x) = 12$
c'est-à-dire : $-0{,}5x + 3 = 12$
$-0{,}5x = 12 - 3$
$-0{,}5x = 9$
$x = \frac{9}{-0{,}5}$
$x = -18$
Donc l'antécédent de 12 est -18.

5 g est la fonction affine définie par $g(x) = 7x - 2$.
Déterminer :

a. $g(-5)$ **b.** le nombre qui a pour image 0

a. $g(-5) = 7 \times (-5) - 2 = -35 - 2 = -37.$
b. On cherche un nombre x tel que $g(x) = 0$
c'est-à-dire tel que : $7x - 2 = 0$
$7x = 2$
$x = \frac{2}{7}$
Donc l'antécédent de 0 est $\frac{2}{7}$.

6 h est la fonction affine $x \mapsto -0{,}2x + 6$.
Compléter ce tableau.

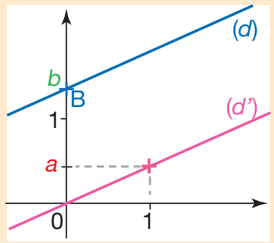
x	-4	55	0	10	7
$h(x)$	6,8	-5	6	4	4,6

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE

65 Représenter graphiquement une fonction affine

- Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est **une droite** (d) constituée de tous les points de coordonnées (x ; $ax + b$).
- La droite (d) est **parallèle** à la droite (d') qui représente la fonction linéaire $x \mapsto ax$ et passe par le point B de coordonnées (0 ; b).



★

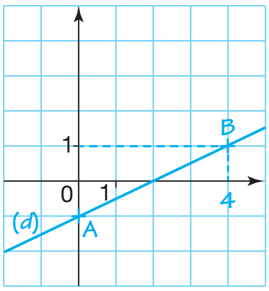
1 La droite (d) est la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = 0{,}5x - 1$.

a. Compléter :

- $f(0) =$ –1
- $f(4) =$ 0,5 × 4 – 1 = 2 – 1 = 1

Donc la droite (d) passe par les points A(0 ; –1) et B(4 ; 1).

b. Placer les points A et B puis tracer la droite (d).

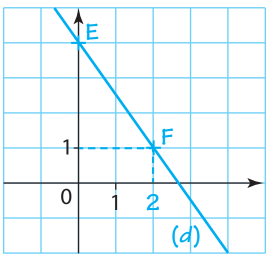


2 La droite (d) est la représentation graphique de la fonction affine g définie par $g(x) = -1{,}5x + 4$.

a. Calculer $g(0)$ et $g(2)$.

b. En déduire les coordonnées de deux points E et F de (d).

c. Placer les points E et F puis tracer la droite (d).



a. $g(0) = 4$
$g(2) = -1{,}5 \times 2 + 4 = -3 + 4 = 1$.
b. E (0 ; 4) et F (2 ; 1) sont deux points de (d).

3 La droite (d) est la représentation graphique de la fonction affine g définie par $g(x) = 9x - 5$. Calculer $g(17)$ puis dire si le point M(17 ; 147) appartient ou non à la droite (d). Justifier.

$g(17) = 9 \times 17 - 5 = 148$
$g(17) \neq 147$ donc M(17 ; 147) n'appartient pas à la droite (d).

★★

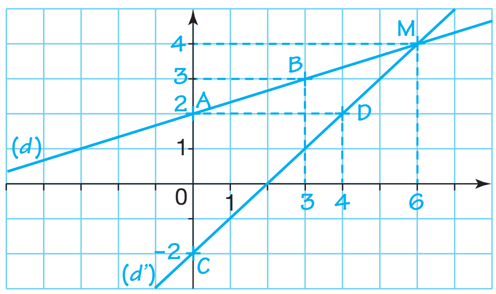
4 Les droites (d) et (d') sont les représentations graphiques des fonctions affines f et g telles que :

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = x - 2.$$

a. Tracer les droites (d) et (d').

b. Lire les coordonnées de leur point d'intersection M.

c. Vérifier par le calcul que M appartient à chacune des droites (d) et (d').



a. • $f(0) = 2$
• $f(3) = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 1 + 2 = 3$
donc la droite (d) passe par les points A(0 ; 2) et B(3 ; 3).
• $g(0) = -2$
• $g(4) = 4 - 2 = 2$
donc la droite (d') passe par les points C(0 ; – 2) et D(4 ; 2).
b. On lit : M(6 ; 4).
c. • $f(6) = \frac{1}{3} \times 6 + 2 = 2 + 2 = 4$
donc M(6 ; 4) appartient à (d).
• $g(6) = 6 - 2 = 4$
donc M(6 ; 4) appartient à (d').

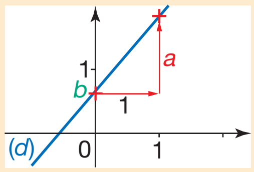
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....

Note ..... / .....

FICHE

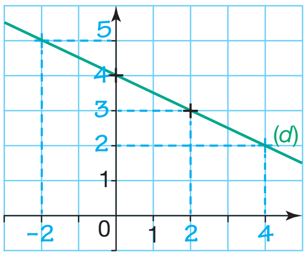
66 Coefficient directeur – Ordonnée à l'origine

Dans un repère, (d) est la droite qui représente la fonction affine $x \mapsto ax + b$.
On dit que :
- a est le coefficient directeur de la droite (d) ;
- b est l'ordonnée à l'origine de la droite (d) : c'est l'ordonnée du point d'abscisse nulle de (d).



★

1 La droite (d) représente une fonction affine f. Lire :



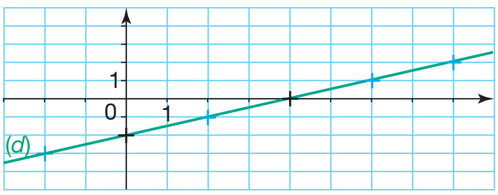
a. l'image de 4 : ..2.....

b. $f(-2)$: ..5.............

c. l'antécédent de 3 : .2..............................

d. le nombre qui a pour image 4 : ....0.............

2 La droite (d) représente une fonction affine g.



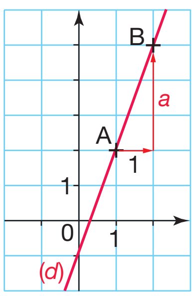
Compléter ce tableau.

x	4	..6..	2	0	..−2..	..8..
$g(x)$	..0..	1	..−1..	..−2..	−3	2

3 La droite (d) représente une fonction affine g telle que : $x \mapsto ax + b$.

a. Lire l'ordonnée à l'origine b de (d) :

.−1..............................



b. En utilisant les points A et B de (d), lire le coefficient directeur a de (d).

.3..............................

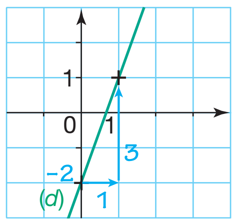
c. Donner l'expression de $g(x)$.

$g(x) =$ $3x + (-1)$ c'est-à-dire $g(x) = 3x - 1$...............

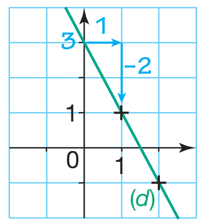
★★

4 La droite (d) représente une fonction affine f. Dans chaque cas, indiquer l'ordonnée à l'origine b et le coefficient directeur a de la droite (d) puis donner l'expression de $f(x)$.

a.



b.

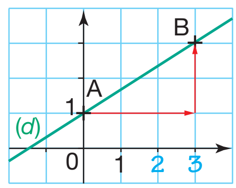


a. $b = -2$ et $a = 3$............. b. $b = 3$ et $a = -2$.............

$f(x) = 3x - 2$............... $f(x) = -2x + 3$.............

5 La droite (d) représente une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$. Lire ci-contre :

a. En utilisant les points A et B de la droite (d), déterminer le coefficient directeur de (d). Expliquer.



Se décaler de 3.........

vers la droite puis monter de 2 revient à se décaler.......

de 1 vers la droite et monter de $\frac{2}{3}$. Donc $a = \frac{2}{3}$...........

b. Déterminer l'expression de $f(x)$.

On lit $b = 1$ donc $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$..........................

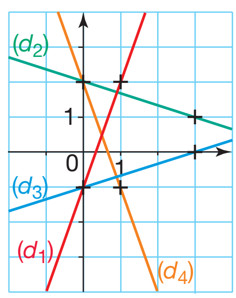
6 Associer chacune des fonctions affines ci-dessous à sa représentation graphique.

$f : x \mapsto 3x - 1$ ....(d_1)......

$g : x \mapsto -3x + 2$ ....(d_4)......

$h : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$ ....(d_2)......

$k : x \mapsto \frac{1}{3}x - 1$ ....(d_3)......



CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE 67

Déterminer une fonction affine

Pour déterminer l'expression d'une fonction affine f définie par $f: x \mapsto ax + b$, on peut utiliser la proportionnalité des accroissements de x et de $f(x)$.
En effet, quels que soient les nombres x_1 et x_2 : $f(x_2) - f(x_1) = a\,(x_2 - x_1)$.

★

1 f est une fonction affine telle que : $x \mapsto ax + b$.
On sait que $f(0) = 7$ et $f(9) - f(5) = 24$.

a. Quelle information sur a ou b peut-on déduire de :

- $f(0) = 7$? $f(0) = b$ donc $b = 7$
- $f(9) - f(5) = 24$? $f(9) - f(5) = a(9 - 5)$

c'est à dire $24 = a \times 4$ donc $a = 6$

b. Déterminer l'expression de $f(x)$.

$f(x) = 6x + 7$

2 f est la fonction affine telle que :
$f(13) = 34$ et $f(11) = 26$.
Compléter.

- La proportionnalité des accroissements permet d'écrire :

$f(13) - f(11) = a(13 - 11)$

c'est-à-dire $34 - 26 = a(13 - 11)$

$8 = a \times 2$

$a = 4$

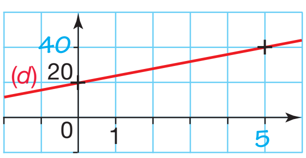
Ainsi $f(x) = 4x + b$.

- $f(13) = 34$ se traduit par : $4 \times 13 + b = 34$.
En déduire b.

$52 + b = 34$ d'où $b = 34 - 52$ soit $b = -18$

- En conclusion : $f(x) = 4x - 18$

3 La droite (d) représente une fonction affine f.
Donner l'expression de $f(x)$.



- $f(0) = 20$ donc $b = 20$.
- $f(5) - f(0) = a(5 - 0)$
$40 - 20 = a \times 5$
$20 = a \times 5$
$a = 4$

donc $f(x) = 4x + 20$

★★

4 Déterminer la fonction affine f telle que :
$f(6) = 4$ et $f(7) = -1$.

- $f(7) - f(6) = a(7 - 6)$
c'est-à-dire $-1 - 4 = a \times 1$ soit $-5 = a$
Ainsi $f(x) = -5x + b$.
- $f(6) = 4$ se traduit par : $-5 \times 6 + b = 4$.
c'est-à-dire $-30 + b = 4$
$b = 4 + 30$ d'où $b = 34$.

Donc $f(x) = -5x + 34$

5 Hélia et Nils ont pris un abonnement semaine chez *Vélo Vert*.
Hélia a loué un vélo pendant 18 h ; il a payé 35 €.
Nils a payé 41 € pour une location pendant 22 h.
On note :

- a le montant de l'abonnement semaine ;
- c le coût d'une heure de location ;
- $p(x)$ le coût total de x heures de location.

a. Exprimer $p(x)$ en fonction de a, de c et de x.

b. Déterminer l'expression de $p(x)$.
Que signifie ce résultat pour la situation ?

a. $p(x) = cx + a$

b. • p est la fonction affine telle que
$p(18) = 35$ et $p(22) = 41$.
Donc $p(22) - p(18) = c(22 - 18)$
$41 - 35 = c(22 - 18)$
$6 = c \times 4$
$c = \frac{6}{4}$ ou $c = 1{,}5$

Ainsi $p(x) = 1{,}5\,x + a$.

- $p(18) = 35$ se traduit par :
$1{,}5 \times 18 + a = 35$
$27 + a = 35$ et $a = 8$.

Donc $p(x) = 1{,}5x + 8$.
L'abonnement semaine coûte 8 €.
L'heure de location coûte 1,50 €.

OBJECTIF BREVET

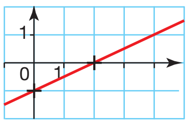
▶ Sélection de sujets de Brevet

★★

QCM

Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

Note ..... / 5

A	Parmi ces fonctions, celles qui sont des fonctions affines sont…	f définie par $f : x \mapsto 6x + 3$	g définie par $g(x) = 5x$	h définie par $h(x) = 3 - \frac{x}{7}$
B	g est la fonction affine définie par $g(x) = 3x + 1$. Alors…	l'image de 4 est 13	l'antécédent de 6 est 19	l'antécédent de 22 est aussi l'image de 2
C	Ce graphique définit une fonction g. Alors… 	g est une fonction affine et $g(1) = 4$	l'antécédent de 0 est 2	$g(x) = 2x - 1$
D	Dans un repère, la droite (d) représente la fonction affine h définie par $h(x) = 8x - 20$. On peut affirmer que…	M (75 ; 580) est un point de (d)	(d) coupe l'axe des ordonnées au point A(2,5 ; 0)	l'ordonnée à l'origine de (d) est –20
E	f est la fonction affine telle que $f(15) = 17$ et $f(11) = 7$. Alors…	$f(x) = 2{,}5x - 20{,}5$	$f(x) = 0{,}4x + 11$	$f(13) = 12$

1 ▶ Utiliser un tableur

On a utilisé un tableur pour calculer les images de différentes valeurs de x par une fonction affine f.
Voici une copie de l'écran.

C2 | =-5*C1+7

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$	22	17	12	7	2	-3	-8

1. a. Quelle est l'image de –1 par f ?

b. Quel est l'antécédent de –3 par f ?

2. Donner l'expression de $f(x)$.

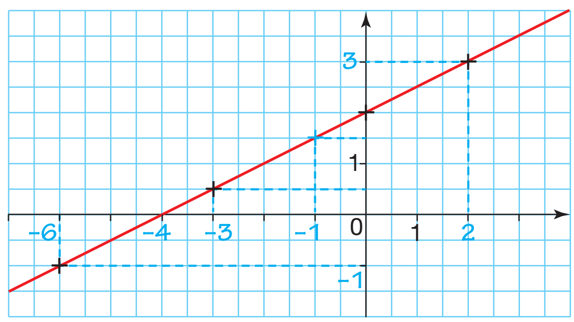
3. Calculer $f(6)$.

D'après *DNB*

1. a. L'image de –1 est 12.
b. L'antécédent de –3 est 2.
2. La souris est positionnée dans la cellule C2 et on lit que l'on a saisi =-5*C1+7.
Donc $f(x) = -5x + 7$.
3. $f(6) = -5 \times 6 + 7 = -30 + 7 = -23$.

2 ▶ Lire une représentation graphique

Ci-dessous la droite (d) est la représentation graphique d'une fonction affine f.



1. Lire sur le graphique :

a. l'image de 2 par la fonction f : 3

b. $f(-1)$: 1,5

c. l'antécédent de –1 : –6

d. l'antécédent de 0 : –4

2. Par lecture graphique, trouver x tel que :
$f(x) = 0{,}5$.

$x = -3$

D'après *DNB*

3 ▶ *Calculer une image et un antécédent*

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = -4x + 1.$$

a. Calculer l'image de -6 par f.

b. Calculer l'antécédent de 11 par f.

D'après *DNB*

a. $f(-6) = -4 \times (-6) + 1 = 24 + 1 = 25$
Donc l'image de -6 par f est 25.
b. On cherche un nombre x tel que $f(x) = 11$
d'où $-4x + 1 = 11$
$-4x = 11 - 1$
$-4x = 10$
$\dfrac{-4x}{-4} = \dfrac{10}{-4}$
$x = -2{,}5$
Donc l'antécédent de 11 est $-2{,}5$.

4 ▶ *Travailler avec plusieurs fonctions*

Le nombre d'abonnés à une revue dépend du prix de la revue.
Pour un prix x compris entre 0 et 20 €, le nombre d'abonnés est donné par la fonction A telle que : $A(x) = -50x + 1\,250$.
La recette, c'est-à-dire le montant perçu par l'éditeur de cette revue, est donnée par la fonction R telle que : $R(x) = -50x^2 + 1\,250x$.

1. Le nombre d'abonnés est-il proportionnel au prix de la revue ? Justifier.

2. a. Déterminer l'antécédent de 750 par A et interpréter concrètement ce résultat.

b. Calculer le montant de la recette s'il y a 750 abonnés.

D'après *DNB*

1. La fonction A est une fonction affine qui n'est pas linéaire, donc le nombre d'abonnés n'est pas proportionnel au prix de la revue.
2. a. On cherche un nombre x tel que :
$A(x) = 750$ d'où $-50x + 1\,250 = 750$
$-50x = 750 - 1\,250$
$-50x = -500$
$x = 10.$
L'antécédent de 750 est 10.
Il y a 750 abonnés si la revue coûte 10 €.
b. $R(10) = -50 \times 10^2 + 1\,250 \times 10 = 7\,500$
La recette est de 7 500 €.

5 ▶ *Comprendre une situation*

Dans un jeu vidéo, on a le choix entre trois personnages : un guerrier, un mage et un chasseur.
La force d'un personnage se mesure en points.
Tous les personnages commencent au niveau 0, mais ils n'évoluent pas de la même façon :
- le guerrier commence avec 50 points et ne gagne pas d'autre point au cours du jeu ;
- le mage n'a aucun point au début mais gagne 3 points par niveau ;
- le chasseur commence à 40 points et gagne 1 point par niveau.

a. Compléter ce tableau.

Niveau	0	1	5	10	15	25
Points du guerrier	50	50	50	50	50	50
Points du mage	0	3	15	30	45	75
Points du chasseur	40	41	45	50	55	65

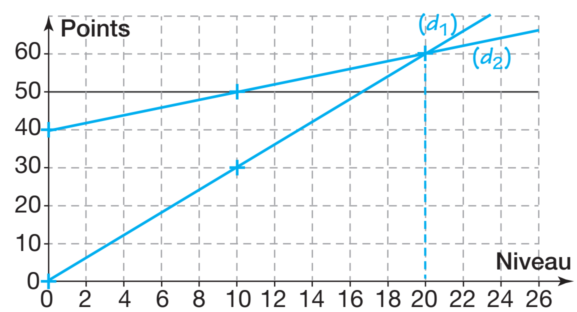
b. x désigne le niveau de jeu d'un personnage.
Associer chaque expression à son personnage.

$f(x) = 3x$	Le chasseur
$g(x) = 50$	Le mage
$h(x) = x + 40$	Le guerrier

c. Calculer l'antécédent de 102 par h.
Interpréter ce résultat pour le jeu.

• On cherche un nombre x tel que $h(x) = 102$ soit $x + 40 = 102$ d'où $x = 102 - 40 = 62$.
L'antécédent de 102 est 62.
• Le chasseur aura 102 points au niveau 62.

d. Dans ce repère, on a représenté la fonction g.
Tracer les droites (d_1) et (d_2) qui représentent les fonctions f et h respectivement.



e. Déterminer à l'aide du graphique le niveau à partir duquel le mage devient le plus fort.

Il devient le plus fort à partir du niveau 20.

D'après *DNB*

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note ..... / .....

FICHE
69 Perfectionnement

★★★

1 Dans un repère, on considère les points A (29 ; 208) et B (44 ; 313).

1. Déterminer la fonction affine f représentée par la droite (AB).

2. Déterminer :

a. l'abscisse du point M de la droite (AB) qui a pour ordonnée 684 ;

b. l'ordonnée du point N de la droite (AB) qui a pour abscisse 420.

3. P est le point de coordonnées (85 ; 600). Les points A, B et P sont-ils alignés ? Expliquer.

1. f est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$.

• La proportionnalité des accroissements permet d'écrire :

$$f(44) - f(29) = a(44 - 29)$$

d'où $313 - 208 = a \times 15$

$$105 = a \times 15$$

$$a = \frac{105}{15}$$

$$a = 7$$

Ainsi $f(x) = 7x + b$.

• $f(29) = 208$ se traduit par :

$$7 \times 29 + b = 208$$

$$203 + b = 208$$

$$b = 5.$$

• En conclusion $f(x) = 7x + 5$.

2. a. On note $(x ; y)$ les coordonnées de M.

$y = f(x)$ et $y = 684$

soit $7x + 5 = 684$

$$7x = 684 - 5$$

$$7x = 679$$

$$x = \frac{679}{7}$$

$$x = 97$$

L'abscisse de M est 97.

b. On calcule l'image de 420 par f.

$$f(420) = 7 \times 420 + 5 = 2\,945$$

donc l'ordonnée de N est 2 945.

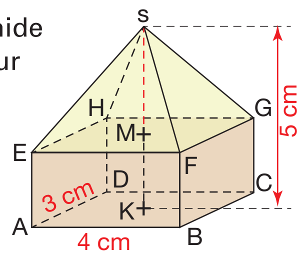
3. On calcule l'image de 85 par la fonction f.

$f(85) = 7 \times 85 + 5 = 600$

Donc le point P appartient à la droite (AB) ; les points A, B et P sont alignés.

2 SEFGH est une pyramide de sommet S et de hauteur [SM] posée sur un parallélépipède rectangle ABCDEFGH.

K est le point d'intersection de (SM) et de la face ABCD.



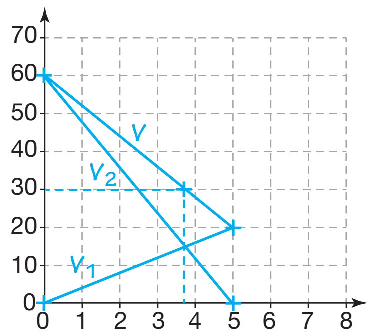
AB = 4 cm, AD = 3 cm, SK = 5 cm.

On pose SM = x cm ($0 < x < 5$).

1. Exprimer en fonction de x :

- le volume $V_1(x)$ de la pyramide ;
- le volume $V_2(x)$ du parallélépipède rectangle ;
- le volume $V(x)$ du solide ABCDEFGHS.

2. Tracer, dans le repère ci-dessous, les représentations graphiques des fonctions V_1, V_2 et V pour x compris entre 0 et 5.



3. a. Pour quelle valeur de x a-t-on $V_1(x) = V_2(x)$?

b. Quelle est alors la valeur de $V(x)$?

Donner les réponses avec la précision permise par le graphique.

1. • $V_1(x) = \frac{EF \times FG \times SM}{3} = \frac{4 \times 3 \times x}{3}$

Donc $V_1(x) = 4x$.

• $MK = SK - SM$ d'où $MK = 5 - x$

$V_2(x) = 4 \times 3 \times (5 - x) = 12(5 - x)$

Donc $V_2(x) = 60 - 12x$

• $V(x) = V_1(x) + V_2(x) = 4x + 60 - 12x$

Donc $V(x) = 60 - 8x$.

3. a. $V_1(x) = V_2(x)$ pour une valeur de x proche de 3,8.

b. Alors $V(x) \approx 30$.

Chapitre 11

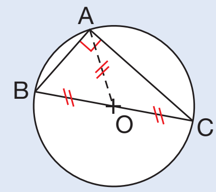
Triangles rectangles. Trigonométrie

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

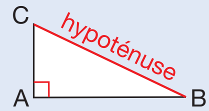
FICHE

70 Propriétés des triangles rectangles

- **Cercle circonscrit**
  - Si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse.
  - Si un triangle est inscrit dans un cercle (ou demi-cercle) de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle.

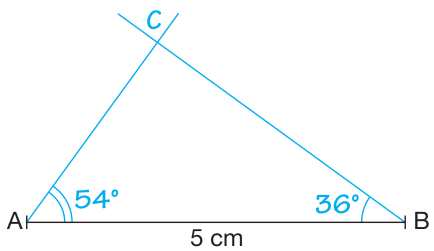


- **L'égalité de Pythagore**
  - Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
  - Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.



1 [AB] est un segment de longueur 5 cm.

a. Placer un point C tel que :
$\widehat{ABC} = 36°$ et $\widehat{BAC} = 54°$.

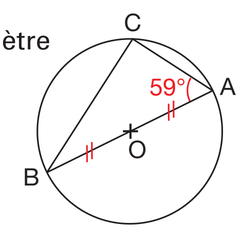


b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

$\widehat{ACB} = 180° - (54° + 36°) = 90°$

Donc le triangle ABC est rectangle en C.

2 Ci-contre, [AB] est un diamètre du cercle de centre O et C est un point de ce cercle.



a. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

a. Le point C appartient au cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABC est rectangle en C.
b. $\widehat{ABC} = 90° - 59°$ donc $\widehat{ABC} = 31°$
L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 31°.

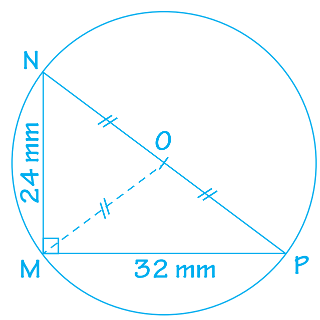
3 **a.** Construire un triangle MNP rectangle en M tel que MN = 24 mm et MP = 32 mm.

b. Calculer la longueur du côté [NP].

c. Construire le cercle circonscrit au triangle MNP. Quel est son centre ? Quel est son rayon ? Justifier.

d. Quelle est la nature des triangles OMN et OMP ?

a.



b. L'égalité de Pythagore dans le triangle MNP rectangle en M permet d'écrire :
$NP^2 = MN^2 + MP^2$ d'où $NP^2 = 24^2 + 32^2$
$NP^2 = 576 + 1\,024 = 1\,600$ alors $NP = 40$ mm.
c. Le cercle circonscrit au triangle rectangle MNP a pour diamètre son hypoténuse [NP], donc son centre est O, le milieu de [NP].
$\dfrac{40 \text{ mm}}{2} = 20$ mm donc le rayon est 20 mm.
d. Les triangles OMN et OMP sont isocèles en O.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note ..... / .....

FICHE

71 Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle,

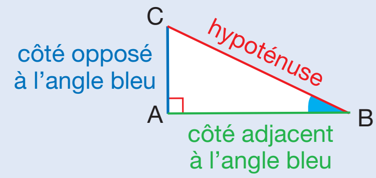
- **le cosinus** d'un angle aigu est le quotient $\dfrac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- **le sinus** d'un angle aigu est le quotient $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- **la tangente** d'un angle aigu est le quotient $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$

Dans le triangle ABC rectangle en A,

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$

$\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$

$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$

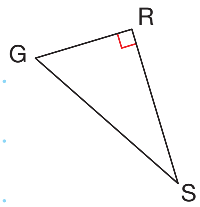


On peut retenir l'expression

$\underbrace{\text{S O H}}_{\text{Sinus}}$ $\underbrace{\text{C A H}}_{\text{Cosinus}}$ $\underbrace{\text{T O A}}_{\text{Tangente}}$

★

1 **1.** Dans le triangle GRS rectangle en R, indiquer :



a. l'hypoténuse [GS]

b. le côté adjacent à $\widehat{GSR}$ [RS]

c. le côté opposé à $\widehat{GSR}$ [GR]

d. le côté adjacent à $\widehat{SGR}$ [GR]

e. le côté opposé à $\widehat{SGR}$ [RS]

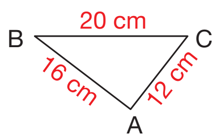
2. Compléter :

a. $\cos \widehat{SGR} = \dfrac{GR}{GS}$

b. $\sin \widehat{GSR} = \dfrac{GR}{GS}$

c. $\tan \widehat{SGR} = \dfrac{RS}{GR}$

2 **1.** Vérifier que ce triangle ABC est un triangle rectangle.



$BC^2 = 20^2 = 400$

$AB^2 + AC^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$

Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2. Écrire le cosinus, le sinus, la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$, puis, dans chaque cas, remplacer les longueurs connues.
En donner l'écriture décimale.

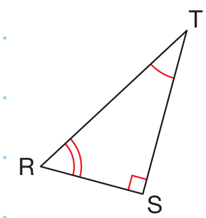
a. $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{16}{20} = 0{,}8$

b. $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$

c. $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{12}{16} = 0{,}75$

★★

3 Dans le triangle RST rectangle en S, quelles longueurs faut-il connaître pour calculer :



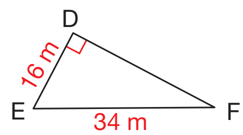
a. $\cos \widehat{RTS}$? TS et TR

b. $\sin \widehat{RTS}$? RS et TR

c. $\tan \widehat{RTS}$? RS et TS

d. $\sin \widehat{TRS}$? TS et TR

4 **1.** Calculer la longueur DF dans ce triangle DEF rectangle en D.



L'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$DE^2 + DF^2 = EF^2$ c'est-à-dire $16^2 + DF^2 = 34^2$

$DF^2 = 1\,156 - 256 = 900$ d'où $DF = 30$ m.

2. Calculer les valeurs exactes de $\cos \widehat{DEF}$, $\sin \widehat{DEF}$ et $\tan \widehat{DEF}$ (donner les réponses sous forme de fractions irréductibles).

Dans le triangle DEF, rectangle en D,

- $\cos \widehat{DEF} = \dfrac{ED}{EF} = \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{17}$
- $\sin \widehat{DEF} = \dfrac{DF}{EF} = \dfrac{30}{34} = \dfrac{15}{17}$
- $\tan \widehat{DEF} = \dfrac{DF}{ED} = \dfrac{30}{16} = \dfrac{15}{8}$

3. Sans autre calcul, en déduire :

a. $\cos \widehat{DFE} = \dfrac{15}{17}$

b. $\tan \widehat{DFE} = \dfrac{8}{15}$

FICHE

72 Calculer une longueur

La calculatrice doit être en mode DEGRE.

Si le symbole D ou DEG n'apparaît pas en haut de l'écran, on procède au réglage :

- **Casio *fx*-92 Collège 2D +**

SECONDE MODE CONFIG 3 (Deg)

On utilise les touches sin, cos, tan.

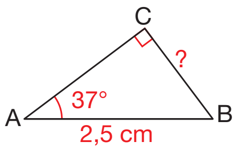
- **TI-Collège Plus Solaire**

mode mettre DEG en surbrillance entrer 2nde mode (quitter)

On utilise les touches sin, cos, tan.

★

1 On se propose de calculer la longueur BC.



a. • Que représente le côté [AB] pour le triangle ABC ?

L'hypoténuse..

• Pour l'angle $\widehat{BAC}$, que représente le côté [BC] ?

Le côté opposé..

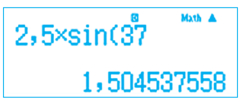
b. Ici, va-t-on utiliser un cosinus, un sinus, une tangente ? *Un sinus*..............................

c. Calculer l'arrondi au dixième de BC.

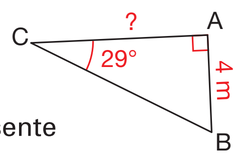
$\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$ c'est-à-dire $\sin 37° = \dfrac{BC}{2{,}5}$

$BC = 2{,}5 \times \sin 37°$

Avec la calculatrice, on trouve $BC \approx 1{,}5$ cm.



2 On se propose de calculer la longueur AC.



a. Pour l'angle $\widehat{ACB}$, que représente

• le côté [AB]? *Le côté opposé*..............................

• le côté [AC] ? *Le côté adjacent*..............................

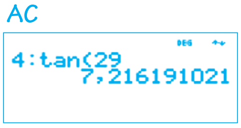
b. Ici, va-t-on utiliser un cosinus, un sinus, une tangente ? *Une tangente*..............................

c. Calculer l'arrondi au centième de AC.

$\tan \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC}$ d'où $\tan 29° = \dfrac{4}{AC}$

$AC \times \tan 29° = 4$

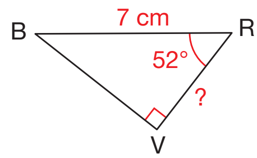
$AC = \dfrac{4}{\tan 29°}$



Avec la calculatrice, on trouve $AC \approx 7{,}22$ m.

★★

3 Avec les données de la figure, calculer la longueur RV et en donner l'arrondi au dixième.



Dans le triangle BRV, rectangle en V,

• on connaît un angle aigu et l'hypoténuse,

• on cherche le côté adjacent à l'angle aigu

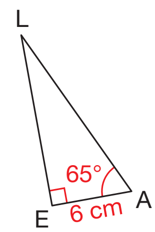
donc on utilise un cosinus.

$\cos \widehat{BRV} = \dfrac{RV}{RB}$ c'est-à-dire $\cos 52° = \dfrac{RV}{7}$

$RV = 7 \times \cos 52°$

Avec la calculatrice, on trouve $RV \approx 4{,}3$ cm.

4 Avec les données de la figure,



a. calculer la longueur EL et en donner la valeur approchée par excès au dixième près ;

b. calculer la longueur AL et en donner l'arrondi au dixième.

a. Dans le triangle AEL, rectangle en E,

• on connaît un angle aigu et son côté adjacent,

• on cherche son côté opposé

donc on utilise une tangente.

$\tan \widehat{LAE} = \dfrac{LE}{AE}$ c'est-à-dire $\tan 65° = \dfrac{LE}{6}$

$LE = 6 \times \tan 65°$

Avec la calculatrice, on trouve $LE \approx 12{,}9$ cm.

b. On connaît un angle aigu et son côté adjacent. On cherche l'hypoténuse. On utilise le cosinus.

$\cos \widehat{LAE} = \dfrac{AE}{AL}$ c'est-à-dire $\cos 65° = \dfrac{6}{AL}$

donc $AL \times \cos 65° = 6$ et $AL = \dfrac{6}{\cos 65°}$

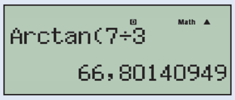
Avec la calculatrice, on trouve $AL \approx 14{,}2$ cm.

FICHE

73 Déterminer un angle aigu

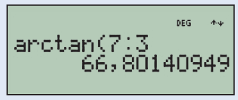
Déterminer l'arrondi au degré de la mesure d'un angle aigu $\widehat{xAy}$ tel que : $\tan \widehat{xAy} = \frac{7}{3}$.

● **Casio *fx*-92 Collège 2D +**



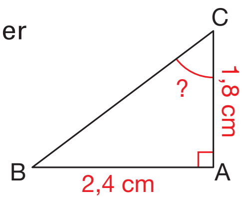
On lit : $\widehat{xAy} \approx 67°$.

● **TI-Collège Plus Solaire**



★

1 On se propose de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.



a. Pour l'angle $\widehat{ACB}$, que représente :

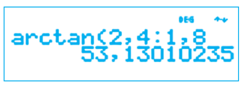
- le côté [AB] ? *Le côté opposé.*
- le côté [AC] ? *Le côté adjacent*

b. Ici, va-t-on utiliser un cosinus, un sinus, une tangente ? *Une tangente*

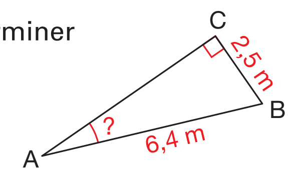
c. Donner l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

$\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{ACB} = \frac{2,4}{1,8}$

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{ACB} \approx 53°$.



2 On se propose de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.



a. ● Que représente le côté [AB] pour le triangle ABC ?

L'hypoténuse

● Pour l'angle $\widehat{BAC}$, que représente le côté [BC] ?

Le côté opposé

b. Ici, va-t-on utiliser un cosinus, un sinus, une tangente ? *Un sinus*

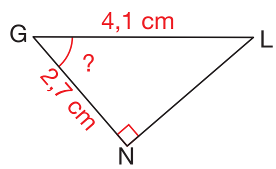
c. Donner l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

$\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$ d'où $\sin \widehat{BAC} = \frac{2,5}{6,4}$

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{BAC} \approx 23°$.

★★

3 Déterminer l'arrondi au dixième de la mesure de l'angle $\widehat{LGN}$.

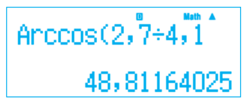


Dans le triangle LGN, rectangle en N, on connaît l'hypoténuse et le côté adjacent à l'angle aigu dont on cherche la mesure.

Donc on utilise un cosinus.

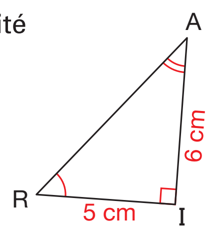
$\cos \widehat{LGN} = \frac{GN}{GL}$ c'est-à-dire $\cos \widehat{LGN} = \frac{2,7}{4,1}$

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{LGN} \approx 48,8°$.



4 **a.** Déterminer l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{ARI}$.

b. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{RAI}$.



***a.** Dans le triangle RIA, rectangle en I, on connaît le côté adjacent et le côté opposé à l'angle aigu dont on cherche la mesure.*

Donc on utilise une tangente.

$\tan \widehat{ARI} = \frac{AI}{RI}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{ARI} = \frac{6}{5}$

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{ARI} \approx 50°$.

***b.** Les angles $\widehat{ARI}$ et $\widehat{RAI}$ sont complémentaires.*

$\widehat{RAI} = 90° - \widehat{ARI}$ c'est-à-dire $\widehat{RAI} \approx 90° - 50°$

Ainsi $\widehat{RAI} \approx 40°$.

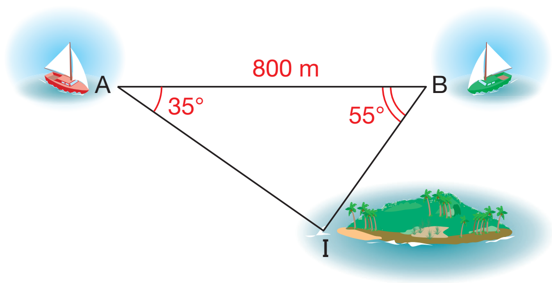
CALCUL MENTAL
• .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....
Note
..... / .....

FICHE

74 Utiliser le cosinus, le sinus ou la tangente

★

1 Deux bateaux A et B souhaitent rejoindre une île I. Ils sont séparés par 800 m et chacun voit l'île sous un angle différent.
Déterminer, à l'unité près, la distance (en m) qui sépare chaque bateau de l'île.

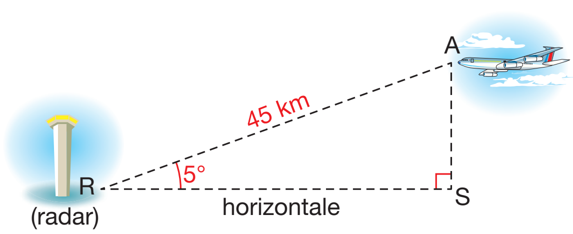


• $35° + 55° = 90°$ donc $\widehat{AIB} = 180° - 90° = 90°$.
Le triangle AIB est donc rectangle en I.

• $\cos \widehat{BAI} = \dfrac{AI}{AB}$ c'est-à-dire $\cos 35° = \dfrac{AI}{800}$.
Donc $AI = 800 \times \cos 35°$.
Avec la calculatrice on trouve $AI \approx 655$ m.

• $\cos \widehat{ABI} = \dfrac{BI}{BA}$ c'est-à-dire $\cos 55° = \dfrac{BI}{800}$.
Donc $BI = 800 \times \cos 55°$.
Avec la calculatrice on trouve $BI \approx 459$ m.

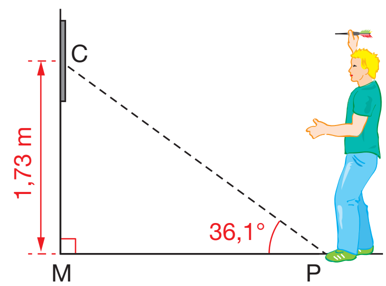
2 Au moment où la tour de contrôle d'un aéroport prend en charge un avion, celui-ci se trouve à 45 km du radar de la tour et la direction radar-avion fait un angle de 5° avec l'horizontale.
À quelle altitude se trouve l'avion à ce moment précis ? On arrondira à la centaine de mètres.
On négligera la hauteur de la tour de contrôle.
La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.



Dans le triangle RSA rectangle en S :
$\sin \widehat{ARS} = \dfrac{AS}{AR}$ c'est-à-dire $\sin 5° = \dfrac{AS}{45}$.
Donc $AS = 45 \times \sin 5°$ et $AS \approx 3{,}9$ km.
L'avion se trouve à environ 3,9 km d'altitude.

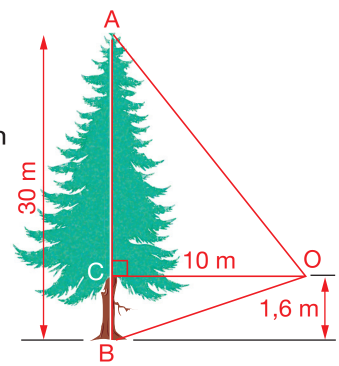
★★

3 La cible d'un jeu de fléchettes est installée de sorte que son centre C se trouve à 1,73 m du sol.
Les pieds du joueur ne doivent pas s'approcher à moins de 2,37 m lorsqu'il lance une fléchette.
Un dispositif mesure l'angle $\widehat{CPM}$ et calcule la distance du joueur au mur. Il sonne si elle n'est pas conforme.
Avec les données portées sur la figure ci-dessus, dire si la sonnerie va se déclencher. Justifier.



Dans le triangle rectangle CPM :
$\tan \widehat{CPM} = \dfrac{CM}{MP}$ c'est-à-dire $\tan 36{,}1° = \dfrac{1{,}73}{MP}$.
Donc $MP \times \tan 36{,}1° = 1{,}73$ et $MP = \dfrac{1{,}73}{\tan 36{,}1°}$.
Donc $MP \approx 2{,}372$ m. Or $2{,}372\text{ m} > 2{,}37$ m donc la sonnerie ne se déclenchera pas.

4 Sous quel angle $\widehat{AOB}$, l'œil placé en O voit-il ce sapin de 30 m de haut ?
On donnera la valeur arrondie à l'unité.
O est à 1,6 m du sol et à 10 m du sapin.



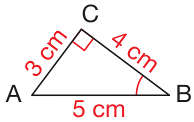
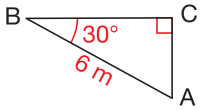
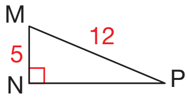
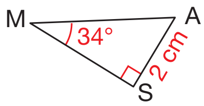
Dans le triangle OBC rectangle en C :
$\tan \widehat{BOC} = \dfrac{BC}{OC}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{BOC} = \dfrac{1{,}6}{10}$.
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{BOC} \approx 9°$.
• Dans le triangle COA rectangle en C :
$\tan \widehat{COA} = \dfrac{CA}{OC}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{COA} = \dfrac{28{,}4}{10}$.
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{COA} \approx 71°$.
• $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC}$ donc $\widehat{AOB} \approx 71° + 9°$.
On voit le sapin sous un angle d'environ 80°.

OBJECTIF BREVET

Sélection de sujets de Brevet

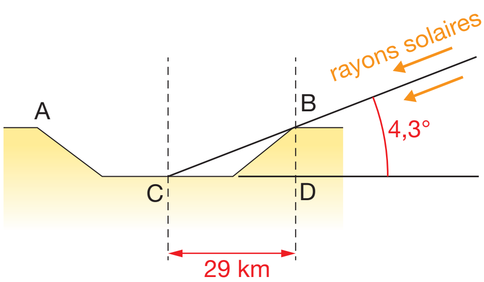
★★

QCM

Voici un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).					Note ..... / 5
A	D'après cette figure, le quotient $\frac{3}{5}$ est égal à…		$\cos \widehat{ABC}$	$\sin \widehat{ABC}$	$\tan \widehat{ABC}$
B	Sur la figure ci-contre, la longueur AC, en m, est égale à…		$6 \times \sin 30°$	$6 \times \cos 60°$	3
C	L'angle $\widehat{MPN}$ ci-contre mesure environ…		22,6°	65,4°	24,6°
D	Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est 54. L'arrondi à l'unité de sa mesure est…		1°	88°	89°
E	Sur la figure ci-contre, la longueur MS, en cm, est égale à…		$\dfrac{2}{\tan 34°}$	$2 \times \tan 34°$	$\dfrac{2}{\sin 34°}$

1 Comprendre un schéma

Le dessin ci-dessous représente un cratère de la lune. BCD est un triangle rectangle en D.
Les dimensions ne sont pas respectées.



a. Calculer la profondeur BD du cratère. Arrondir au dixième de kilomètre.

b. On considère que la longueur CD représente 20 % du diamètre du cratère.
Calculer la longueur AB du diamètre du cratère.

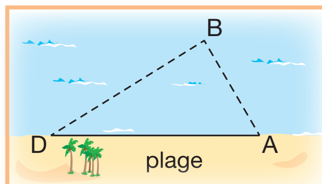
D'après *DNB*

a. Dans le triangle rectangle BCD,
$\tan \widehat{BCD} = \dfrac{BD}{CD}$ c'est-à-dire $\tan 4{,}3° = \dfrac{BD}{29}$
$BD = 29 \times \tan 4{,}3°$ d'où $BD \approx 2{,}2$ km.

b. $CD = \dfrac{20}{100} \times AB$ donc $29 \text{ km} = 0{,}2 \times AB$.
Alors $AB = 29 \text{ km} : 0{,}2$ soit $AB = 145$ km.
Le diamètre du cratère est 145 km.

2 Étudier un triangle rectangle

En nageant, Moana part du point D, contourne une bouée située au point B, puis rejoint la plage au point A.



- AB = 800 m
- AD = 2 341 m
- (AB) ⊥ (BD)

a. Calculer, en m, la longueur du parcours, représenté par DB + BA.
Donner la réponse arrondie à l'unité.

b. Calculer $\sin \widehat{ADB}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ arrondie à l'unité.

D'après *DNB*

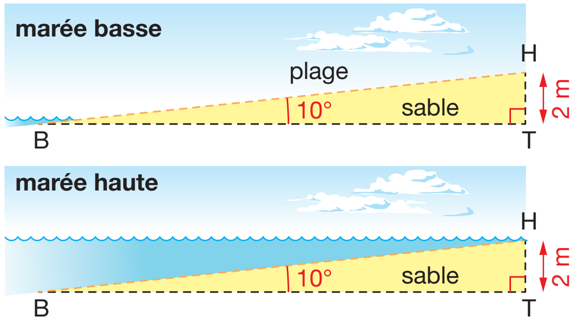
a. • Dans le triangle ABD, rectangle en B, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$BA^2 + BD^2 = AD^2$ soit $800^2 + BD^2 = 2\,341^2$
Ainsi $BD^2 = 5\,480\,281 - 640\,000$
$= 4\,840\,281$
Avec la calculatrice, on trouve $BD \approx 2\,200$ m.

• $BD + BA \approx 2\,200 \text{ m} + 800 \text{ m}$
soit $BD + BA \approx 3\,000$ m.
La longueur du parcours est environ 3 000 m.

b. $\sin \widehat{ADB} = \dfrac{AB}{AD}$ soit $\sin \widehat{ADB} = \dfrac{800}{2\,341}$
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{ADB} \approx 20°$.

3 ▶ *Calculer une longueur*

Ces deux schémas représentent la même plage à deux instants de la journée.



On donne : HT = 2 m ; $\widehat{HBT} = 10°$ et $\widehat{HTB} = 90°$.
Calculer la longueur BH (en m), de plage recouverte par la mer à marée haute.
Donner l'arrondi au dixième.

D'après *DNB*

Dans le triangle rectangle BHT,

$\sin \widehat{HBT} = \dfrac{HT}{BH}$ c'est-à-dire $\sin 10° = \dfrac{2}{BH}$

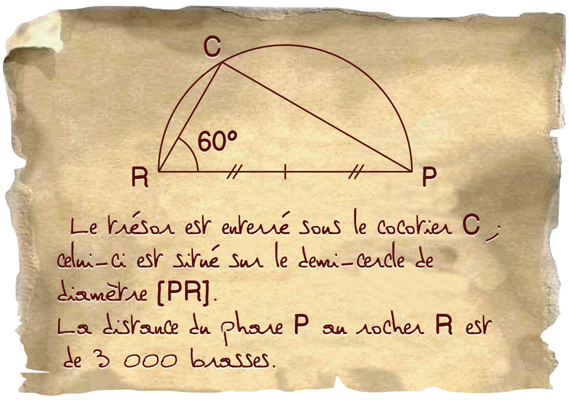
Ainsi $BH \times \sin 10° = 2$ et $BH = \dfrac{2}{\sin 10°}$.

Avec la calculatrice, on trouve $BH \approx 11{,}5$ m.

La mer recouvre environ 11,5 m de la plage.

4 ▶ *Propriété caractéristique*

Voici une carte qui doit permettre à Ruffy de déterrer le fabuleux trésor de Math le Pirate.



Aider Ruffy à mettre la main sur le butin.

a. Démontrer que le triangle PRC est rectangle.

b. Calculer la distance RC en brasses.

D'après *DNB*

a. Le point C appartient au cercle de diamètre [PR] donc le triangle PRC est rectangle en C.

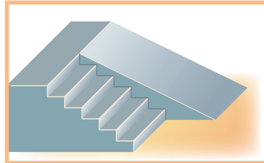
b. $\cos \widehat{PRC} = \dfrac{RC}{RP}$ c'est-à-dire $\cos 60° = \dfrac{RC}{3\,000}$.

Ainsi $RC = 3\,000 \times \cos 60° = 1\,500$

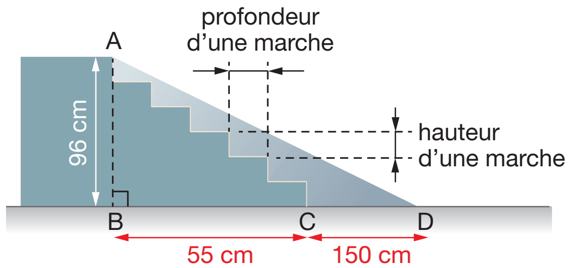
La distance RC est égale à 1 500 brasses.

5 ▶ *Comprendre une situation*

On souhaite construire une structure pour un skate park, constituée d'un escalier de six marches identiques permettant d'accéder à un plan incliné dont la hauteur est 96 cm.



Sur cette figure, l'échelle n'est pas respectée.



• **Normes de construction de l'escalier**
$60 \leqslant 2h + p \leqslant 65$ où h est la hauteur d'une marche et p sa profondeur (en cm).

• **Demandes des habitués du skate park**
– Longueur du plan incliné (c'est-à-dire longueur AD) comprise entre 2,20 m et 2,50 m ;
– Angle formé par le plan incliné avec le sol (ici l'angle $\widehat{BDA}$) compris entre 20° et 30°.

a. Les normes de construction de l'escalier sont-elles respectées ?

b. Les demandes des habitués du skate park pour le plan incliné sont-elles satisfaites ?

D'après *DNB*

a. 96 cm : 6 = 16 cm donc $h = 16$ cm.

55 cm : 5 = 11 cm donc $p = 11$ cm.

$2h + p = 2 \times 16 \text{ cm} + 11 \text{ cm} = 43 \text{ cm}$

donc les normes de construction de l'escalier ne sont pas respectées.

b. BD = BC + CD d'où BD = 55 cm + 150 cm

BD = 205 cm.

• Longueur du plan incliné

Dans le triangle ABD, rectangle en B, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :

$AD^2 = BA^2 + BD^2$

$AD^2 = 96^2 + 205^2 = 9\,216 + 42\,025 = 51\,241$

Avec la calculatrice on trouve $AD \approx 226$ cm.

$AD \approx 2{,}26$ m et $2{,}20 \text{ m} < 2{,}26 \text{ m} < 2{,}50$ m.

• Angle formé par le plan incliné

$\tan \widehat{BDA} = \dfrac{BA}{BD}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{BDA} = \dfrac{96}{205}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{BDA} \approx 25°$.

$20° < 25° < 30°$

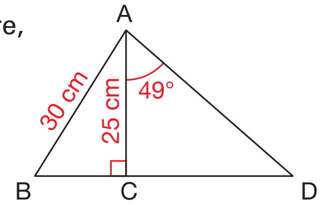
• Les deux demandes sont satisfaites.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
Note ..... / .....

FICHE
76 Perfectionnement

★★★

1 Sur la figure ci-contre, les points B, C et D sont alignés.
Calculer la distance BD.
On donnera l'arrondi au dixième.



• *Dans le triangle rectangle ABC, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :*
$CA^2 + CB^2 = AB^2$
$25^2 + CB^2 = 30^2$
$625 + CB^2 = 900$
$CB^2 = 900 - 625 = 275$
Ainsi $CB = \sqrt{275}$ *(en cm).*
• *Dans le triangle rectangle ADC,*
$\tan \widehat{CAD} = \dfrac{CD}{AC}$ *c'est-à-dire* $\tan 49° = \dfrac{CD}{25}$
$CD = 25 \times \tan 49°$ *(en cm).*
• $BD = BC + CD$
donc $BD = \sqrt{275} + 25 \times \tan 49°$
On trouve $BD \approx 45{,}3$ *cm.*

2 Deux formules de trigonométrie ont été établies :

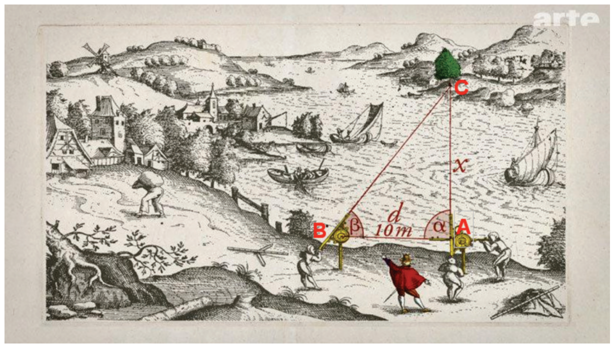
> $\hat{a}$ désignant un angle aigu d'un triangle rectangle,
> **(1)** $(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2 = 1$ **(2)** $\tan \hat{a} = \dfrac{\sin \hat{a}}{\cos \hat{a}}$

Dans un triangle ABC rectangle en A, on sait que $\sin \widehat{ABC} = 0{,}8$.
En déduire la valeur exacte de :

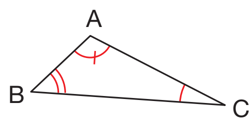
a. $\cos \widehat{ABC}$ **b.** $\tan \widehat{ABC}$

a. *D'après la formule (1) on peut écrire :*
$\left(\cos \widehat{ABC}\right)^2 + \left(\sin \widehat{ABC}\right)^2 = 1$
c'est-à-dire $\left(\cos \widehat{ABC}\right)^2 + 0{,}8^2 = 1.$
Donc $\left(\cos \widehat{ABC}\right)^2 = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36.$
Puisque $\cos \widehat{ABC}$ *est positif, on en déduit :*
$\cos \widehat{ABC} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$
b. *D'après la formule (2) :*
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}}$$
c'est-à-dire $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}.$

3 Les premières cartes civiles de France ont été établies sous Louis XV par une famille de géographes et astronomes du nom de Cassini. Ils relevaient des distances entre des points remarquables (clochers, tours, châteaux, collines…) pour obtenir le positionnement exact des lieux.



Cette gravure montre comment, au XVIe siècle, on déterminait une distance inaccessible comme la largeur de la rivière, entre un point A d'une rive et l'arbre C situé sur l'autre rive. On plaçait un autre point B peu éloigné de A (ici AB = 10 m), puis à l'aide d'un système de visée on mesurait les deux angles α et β.
On utilisait ensuite une formule de trigonométrie :



$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}}$$

On suppose ici que $\widehat{BAC} = 89°$ et $\widehat{ABC} = 72°$.
Quelle est la largeur, en m, de la rivière ?
On arrondira au dixième.

• *On calcule la mesure de l'angle* $\widehat{BCA}$:
$\widehat{BCA} = 180° - (72° + 89°).$
$\widehat{BCA} = 180° - 161°.$
$\widehat{BCA} = 19°$
• *D'après la formule, on peut écrire :*
$\dfrac{BC}{\sin 89°} = \dfrac{AC}{\sin 72°} = \dfrac{10}{\sin 19°}.$
$\dfrac{AC}{\sin 72°} = \dfrac{10}{\sin 19°}$ *; l'égalité des produits en croix, permet d'écrire :*
$AC \times \sin 19° = 10 \times \sin 72°$
d'où $AC = \dfrac{10 \times \sin 72°}{\sin 19°}$
Avec la calculatrice, on trouve $AC \approx 29{,}2$ *m.*
La largeur de la rivière est environ $29{,}2$ *m.*

Configuration de Thalès

Chapitre 12

CALCUL MENTAL	• …………	• …………	• …………	• …………	• …………	Note
	• …………	• …………	• …………	• …………	• …………	….. / …..

FICHE

77 Configuration de Thalès vue en 4^{e}

SOCLE

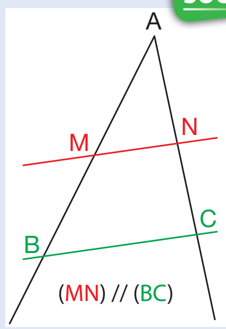
Si deux demi-droites de même origine sont coupées par **deux droites parallèles**, alors les longueurs des côtés des deux triangles ainsi formés sont proportionnelles.

Tableau de proportionnalité

Longueurs des côtés de AMN	AM	AN	MN
Longueurs des côtés de ABC	AB	AC	BC

Égalités de quotients

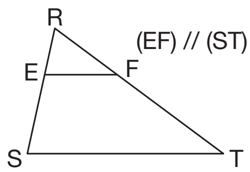
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



★

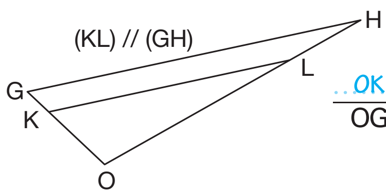
1 Dans chaque cas, les deux triangles dessinés forment une configuration de Thalès.
Compléter les pointillés :

a.



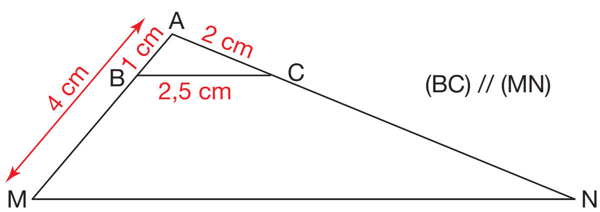
$$\frac{RE}{RS} = \frac{RF}{RT} = \frac{EF}{ST}$$

b.



$$\frac{OK}{OG} = \frac{OL}{OH} = \frac{KL}{GH}$$

2 Ces triangles ABC et AMN forment une configuration de Thalès.



a. Compléter : la longueur AM est 4 fois plus grande que la longueur AB.

Donc la longueur AN est 4 fois plus grande que la longueur AC. Donc AN = 8 cm.

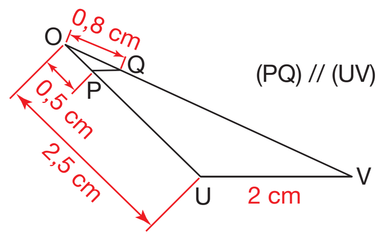
b. Calculer la longueur MN.

MN = 4 × BC = 4 × 2,5 cm

MN = 10 cm

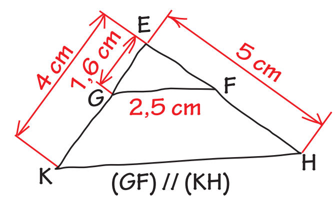
★★

3 Les triangles OPQ et OUV forment une configuration de Thalès. Compléter ce tableau de proportionnalité.



	OP	OQ	PQ
	0,5	0,8	0,4
× 5	2,5	4	2
	OU	OV	UV

4 Sur ce croquis à main levée, les triangles EFG et EHK forment une configuration de Thalès.



a. Expliquer pourquoi $\frac{EF}{5} = \frac{1,6}{4}$.

(GF) // (KH) donc $\frac{EF}{EH} = \frac{EG}{EK}$ c'est-à-dire $\frac{EF}{5} = \frac{1,6}{4}$

b. Compléter : EF = 5 × $\frac{1,6}{4}$

donc EF = 2 cm.

c. Expliquer pourquoi $\frac{2,5}{KH} = \frac{1,6}{4}$.

$\frac{EG}{EK} = \frac{GF}{KH}$ c'est-à-dire $\frac{1,6}{4} = \frac{2,5}{KH}$

d. Compléter : KH × 1,6 = 2,5 × 4

donc KH = $\frac{2,5 \times 4}{1,6}$ soit KH = 6,25 cm.

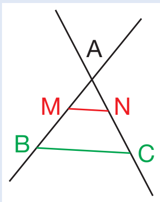
CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....

Note ..... / .....

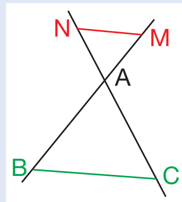
FICHE
78 Prolongement de la configuration de Thalès

Théorème de Thalès : Si deux droites (BM) et (CN) sécantes en A sont coupées par deux parallèles (BC) et (MN), alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Configuration de 4ᵉ

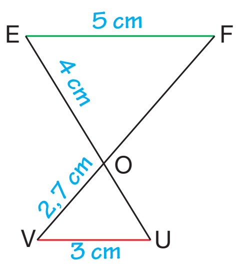


Nouvelle configuration de 3ᵉ



★

1 Les triangles OEF et OUV forment une configuration de Thalès : (EF) // (UV).



1. Compléter :
$\dfrac{OE}{OU} = \dfrac{OF}{OV} = \dfrac{EF}{UV}$

2. a. Porter sur la figure les informations :
OE = 4 cm ; OV = 2,7 cm ; UV = 3 cm ; EF = 5 cm.

b. Expliquer pourquoi $\dfrac{4}{OU} = \dfrac{5}{3}$.

(EF) // (UV) donc $\dfrac{OE}{OU} = \dfrac{EF}{UV}$ c'est-à-dire $\dfrac{4}{OU} = \dfrac{5}{3}$

Compléter :
5 × OU = *4* × *3* donc OU = *2,4* cm

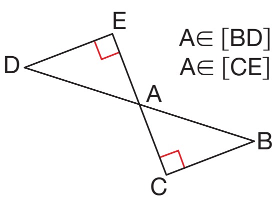
c. Expliquer pourquoi $\dfrac{OF}{2,7} = \dfrac{5}{3}$.

(EF) // (UV) donc $\dfrac{OF}{OV} = \dfrac{EF}{UV}$ c'est-à-dire $\dfrac{OF}{2,7} = \dfrac{5}{3}$

En déduire OF.

$OF = 2,7 \times \dfrac{5}{3}$ donc OF = 4,5 cm

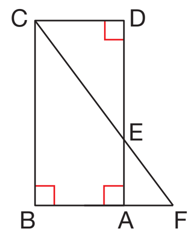
2 Expliquer pourquoi on est en présence d'une configuration de Thalès.



Les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires à (EC) donc parallèles.
Ces deux parallèles coupent les droites (BD) et (CE) sécantes en A.

★★

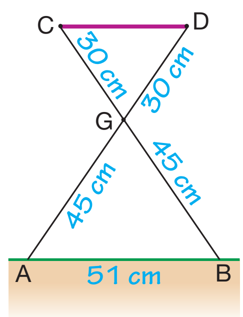
3 ABCD est un rectangle.
E est un point du côté [AD] et les droites (AB) et (CE) se coupent en F.
Quelles égalités de quotients le théorème de Thalès permet-il d'écrire ?



Dans FAE et FBC : (AE) // (BC) donc $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{FE}{FC} = \dfrac{AE}{BC}$

Dans FAE et CDE : (AF) // (CD) donc $\dfrac{EA}{ED} = \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{AF}{DC}$

4 On a modélisé géométriquement un tabouret pliant par les segments [CB] et [AD] pour l'armature métallique et le segment [CD] pour l'assise en toile.
On a CG = DG = 30 cm, AG = BG = 45 cm et AB = 51 cm.
Pour des raisons de confort, l'assise [CD] est parallèle au sol représenté par la droite (AB).
Déterminer la longueur CD de l'assise du tabouret.



Les droites (AD) et (BC) sécantes en G sont coupées par deux parallèles (AB) et (CD) donc d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{GC}{GB} = \dfrac{GD}{GA} = \dfrac{CD}{BA}$.

De $\dfrac{GC}{GB} = \dfrac{CD}{BA}$ on déduit $\dfrac{30}{45} = \dfrac{CD}{51}$

soit $CD = 51 \times \dfrac{30}{45} = 34$.

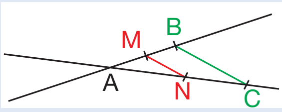
Donc l'assise de ce tabouret pliant a pour longueur 34 cm.

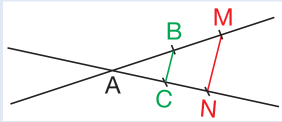
CALCUL MENTAL	• .... • .... • .... • .... •	Note
	• .... • .... • .... • .... •	..... / .....

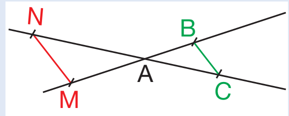
FICHE

79 Connaître et utiliser un énoncé réciproque

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A avec A, B, M et A, C, N dans le même ordre et **si** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, **alors** les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

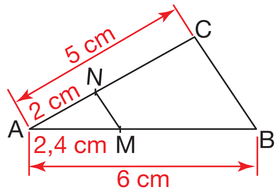






★

1 Sur cette figure, les points A, M, B sont alignés ainsi que les points A, N, C.



a. Compléter :

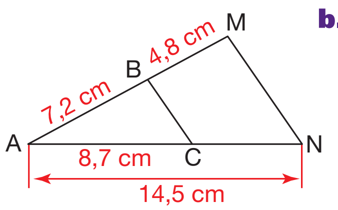
$\frac{AM}{AB} = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

b. Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et (BC) ?

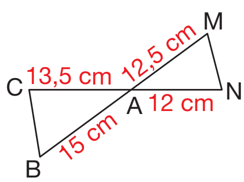
Les points A, N, C sont alignés dans le même ordre que les points A, M, B et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

2 Dans chaque cas, les droites (BM) et (CN) se coupent en A.
Déterminer si les droites (MN) et (BC) sont parallèles ou non.

a.



b.



a. $\frac{AB}{AM} = \frac{7{,}2}{12} = 0{,}6$

$\frac{AC}{AN} = \frac{8{,}7}{14{,}5} = 0{,}6$

donc $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

et les points A, B, M sont alignés dans le même ordre que les points A, C, N, donc : (BC) // (MN).

b. $\frac{AB}{AM} = \frac{15}{12{,}5} = 1{,}2$

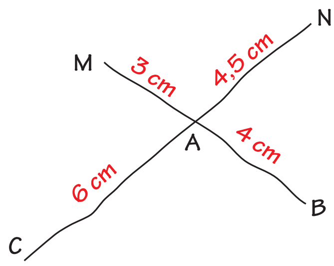
$\frac{AC}{AN} = \frac{13{,}5}{12} = 1{,}125$

donc $\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN}$

donc les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

★★

3 Sur ce croquis à main levée, les droites (BM) et (CN) se coupent en A.
Les droites :



a. (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

b. (CM) et (BN) sont-elles parallèles ?

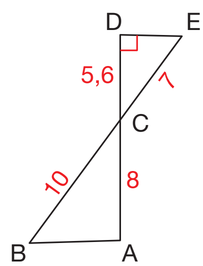
a. $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ *et* $\frac{AN}{AC} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ *et les points M, A, B sont dans le même ordre que les points N, A, C, donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles.*

b. $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$ *et* $\frac{AC}{AN} = \frac{6}{4{,}5} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AC}{AN}$ *donc les droites (CM) et (BN) ne sont pas parallèles.*

4 Les droites (AD) et (BE) se coupent en C.



a. Démontrer que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = 0{,}7$ et les points A, C, D sont alignés dans le même ordre que B, C, E donc les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

b. En déduire que le triangle ABC est rectangle.

(AB) // (DE) et (DE) ⊥ (AD) donc (AB) ⊥ (AD) et le triangle ABC est rectangle en A.

FICHE

80 Agrandissement-réduction

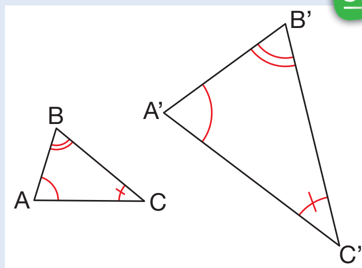
SOCLE

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport ***k*** :
- les angles sont conservés,
- les longueurs sur la figure initiale sont multipliées par ***k***.

Avec les notations de la figure ci-contre :

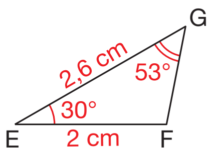
$A'B' = k \times AB$; $A'C' = k \times AC$; $B'C' = k \times BC$

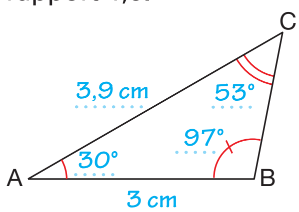
Ici : $k > 1$ car A′B′C′ est un agrandissement de ABC.



★

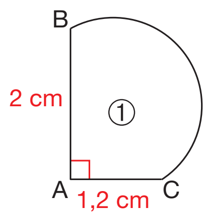
1 Le triangle ABC est un agrandissement du triangle EFG dans le rapport 1,5.

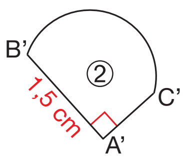




Sans effectuer de mesures, compléter les pointillés à propos de mesures du triangle ABC.

2 La figure ② est une réduction de la figure ①.



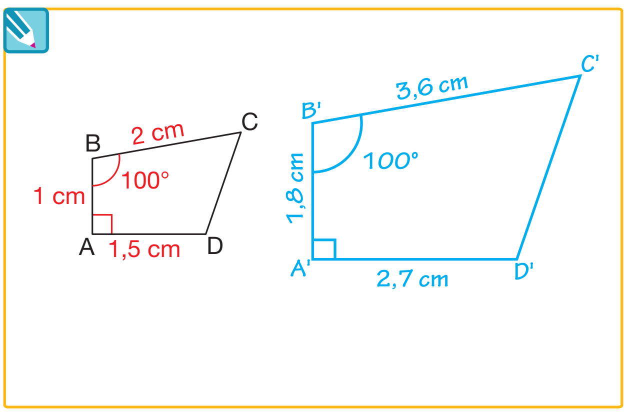


Calculer le rapport *k* de réduction, puis A′C′.

$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$

$A'C' = 1{,}2\ cm \times 0{,}75 = 0{,}9\ cm$

3 Construire un agrandissement de cette figure dans le rapport 1,8.



★★

4 Sandy a voulu construire un agrandissement EFGH d'un quadrilatère ABCD.

Voici les longueurs des côtés :
- de ABCD : 5 cm ; 6 cm ; 3,5 cm ; 4,5 cm ;
- de EFGH : 12 cm ; 8,2 cm ; 14,4 cm ; 10,8 cm.

Sandy a-t-il atteint son objectif ? Expliquer.

ABCD : $3{,}5\ cm < 4{,}5\ cm < 5\ cm < 6\ cm$

EFGH : $8{,}2\ cm < 10{,}8\ cm < 12\ cm < 14{,}4\ cm$

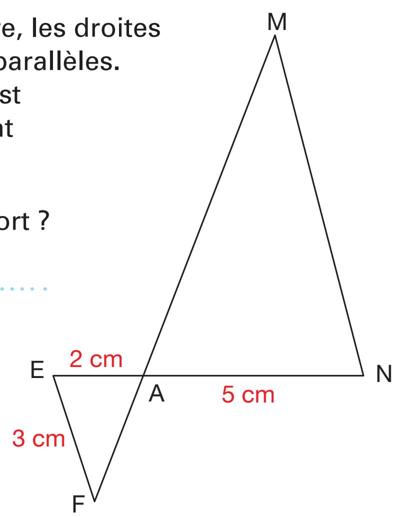
$\frac{8{,}2}{3{,}5} \approx 2{,}34$ $\qquad \frac{10{,}8}{4{,}5} = 2{,}4$

$\frac{12}{5} = 2{,}4$ $\qquad \frac{14{,}4}{6} = 2{,}4$

Les quotients ne sont pas tous égaux

donc Sandy n'a pas atteint son objectif.

5 Sur cette figure, les droites (EF) et (MN) sont parallèles. Le triangle AMN est un agrandissement du triangle AEF.



a. Dans quel rapport ?

$k = \frac{AN}{AE} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

b. Calculer la longueur MN.

$MN = 2{,}5 \times EF = 2{,}5 \times 3\ cm = 7{,}5\ cm$

c. Le cercle circonscrit au triangle AEF a pour rayon 1,6 cm. Quel est le rayon R du cercle circonscrit au triangle AMN ?

$R = 2{,}5 \times 1{,}6\ cm = 4\ cm$

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....

Note ..... / .....

FICHE

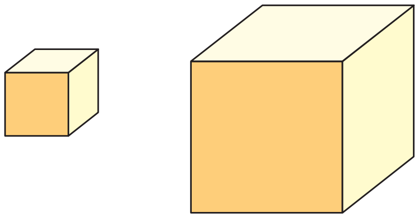
81 Agrandissement-réduction : aires et volumes

SOCLE

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :
- l'aire d'une surface est multipliée par k^2,
- le volume d'un solide est multiplié par k^3.

★

1 Un petit cube a un volume de 512 mm³. Sa face orange a une aire de 64 mm².



Ce cube est agrandi dans le rapport 2,5.

a. Calculer le volume du grand cube. Exprimer ce volume en cm³.

512 mm³ × 2,5³ = 8 000 mm³ = 8 cm³

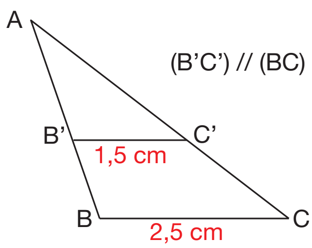
Le volume du grand cube est 8 cm³.

b. Calculer l'aire de la face orange du grand cube. Exprimer cette aire en cm².

64 mm² × 2,5² = 400 mm² = 4 cm².

L'aire de la face jaune du grand cube est 4 cm².

2 Ces deux triangles forment une configuration de Thalès. AB'C' est une réduction de ABC.



a. Quel est le rapport k de cette réduction ?

$k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$

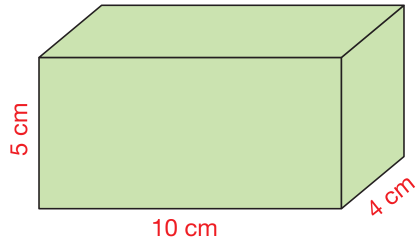
b. Le triangle ABC a une aire de 5,5 cm². Calculer l'aire du triangle AB'C'.

5,5 cm² × 0,6² = 1,98 cm²

L'aire du triangle AB'C' est 1,98 cm².

★★

3 **a.** Calculer le volume du parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.



4 cm × 5 cm × 10 cm = 200 cm³

Le volume est 200 cm³.

b. On agrandit ce parallélépipède rectangle dans le rapport 3. Calculer son volume V de deux façons différentes.

• 4 × 3 = 12 ; 5 × 3 = 15 et 10 × 3 = 30.
Le parallélépipède rectangle agrandi a pour dimensions 12 cm, 15 cm et 30 cm.
V = 12 cm × 15 cm × 30 cm = 5 400 cm³.
• V = 200 cm³ × 3³ = 5 400 cm³
On retrouve ainsi le volume du parallélépipède rectangle agrandi.

4 Trois poupées gigognes sont telles que les dimensions de chacune d'elles sont égales à 80 % des dimensions de celle qui la contient. La plus grande a un volume de 625 cm³. Calculer le volume des deux autres poupées.

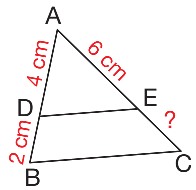
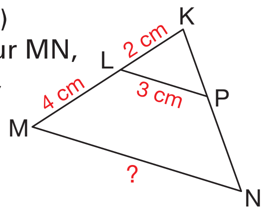
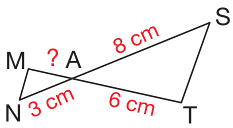
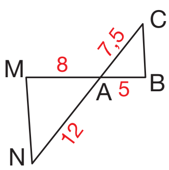
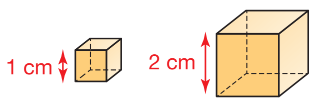
625 cm³ × 0,8³ = 320 cm³.
Le volume de la poupée moyenne est 320 cm³.
320 cm³ × 0,8³ = 163,84 cm³.
Le volume de la petite poupée est 163,84 cm³.

OBJECTIF BREVET

Sélection de sujets de Brevet

★★

QCM

	Voici un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).			Note ..... / 5
A	(DE) // (BC) La longueur EC est égale à … 	3 cm	8 cm	9 cm
B	(MN) // (LP) La longueur MN, en cm, est, égale à … 	6	9	$\frac{3 \times 6}{2}$
C	(MN) // (ST) La longueur AM est égale à … 	1 cm	2,25 cm	4 cm
D	Sur la figure ci-contre … 	les droites (BC) et (MN) sont parallèles	les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles	on ne peut pas savoir si (BC) et (MN) sont parallèles ou non
E	 V étant le volume du petit cube et V′ celui du grand, on a …	V′ = 4 V	V′ = 8 V	V′ = 2 V

1 Utiliser un énoncé réciproque

Soit ADU un triangle, F un point de [AD], C un point de [AU].

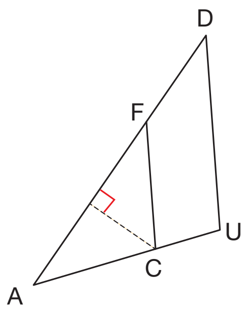
AF = 3 cm, FD = 1,5 cm, AC = 2 cm, AU = 3 cm

Sur cette figure les dimensions ne sont pas respectées.

a. Les droites (FC) et (DU) sont-elles parallèles ?

b. Le triangle ADU est un agrandissement du triangle AFC. Dans quel rapport ?

c. Dans le triangle AFC, la hauteur issue de C mesure 1,6 cm. Calculer l'aire du triangle ADU.



D'après *DNB*

a. Les points A, C, U d'une part et A, F, D d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AC}{AU} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AF}{AD} = \frac{3}{4,5} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$

donc $\frac{AC}{AU} = \frac{AF}{AD}$

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FC) et (DU) sont parallèles.

b. ADU est un agrandissement de AFC dans le rapport $\frac{AU}{AC}$ c'est-à-dire $\frac{3}{2}$.

c. $\frac{1}{2} \times 1,6 \times 3 = 2,4$.

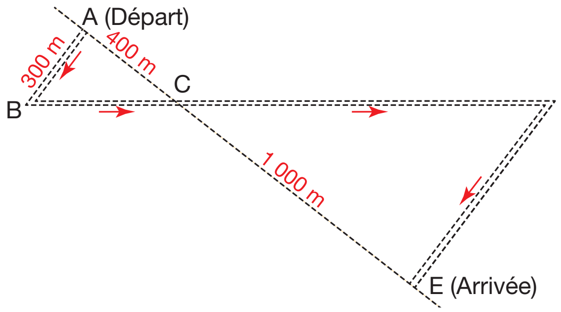
Donc l'aire du triangle AFC est 2,4 cm².

$2,4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,4 \times 1,5^2 = 5,4$

Donc l'aire du triangle ADU est 5,4 cm².

2 ▶ Prendre des initiatives

Des élèves participent à une course à pied.
Avant l'épreuve, un plan leur a été remis.
Il est représenté sur la figure ci-dessous.



On convient que :
- les droites (AE) et (BD) se coupent en C,
- les droites (AB) et (DE) sont parallèles,
- ABC est un triangle rectangle en A.

Calculer la longueur réelle du parcours ABCDE.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

D'après *DNB*

• Calcul de BC :
Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC permet d'écrire :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 300^2 + 400^2 = 250\,000$$

d'où $BC = 500$ m

• Calcul de CD et DE :
Dans les triangles ABC et CDE :
– les droites (AE) et (BD) se coupent en C,
– les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{ED}$$

(1) De $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$ on déduit $\frac{400}{1000} = \frac{500}{CD}$

et $400 \times CD = 500 \times 1\,000$.

D'où $CD = \frac{500 \times 1000}{400}$ soit $CD = 1\,250$ m.

(2) De $\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{ED}$ on déduit $\frac{400}{1000} = \frac{300}{DE}$

et $400 \times DE = 300 \times 1\,000$.

D'où $DE = \frac{300 \times 1000}{400}$ soit $DE = 750$ m

Remarque : on peut aussi utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle CDE rectangle en E.

• Longueur du parcours :
$300\text{ m} + 500\text{ m} + 1\,250\text{ m} + 750\text{ m} = 2\,800\text{ m}$
La longueur du parcours est de 2,8 km.

3 ▶ Construire et démontrer

1. a. Construire un triangle ABC tel que :
AC = 6 cm, AB = 6,5 cm, BC = 2,5 cm.

b. Placer le point R appartenant à [AC] tel que AR = 4,5 cm.

c. Placer le point T appartenant à [AB] tel que la droite (RT) soit perpendiculaire à la droite (AC).

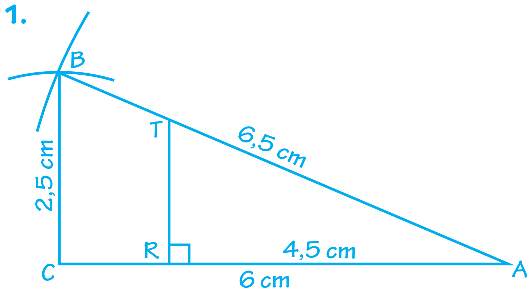
2. a. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

b. Que peut-on dire des droites (RT) et (BC) ? Justifier.

c. Calculer la valeur exacte de la longueur du segment [AT].

D'après *DNB*

1.



2. a. $AB^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$
$CA^2 + CB^2 = 6^2 + 2{,}5^2 = 42{,}25$
donc $AB^2 = CA^2 + CB^2$.
L'égalité de Pythagore est vérifiée.
Le triangle ABC est rectangle en C.
Remarque : on applique ici la réciproque du théorème de Pythagore.

b. D'après **a.**, la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (AC).

Par construction, la droite (RT) est perpendiculaire à la droite (AC).

Ainsi, les droites (BC) et (RT) sont perpendiculaires à la droite (AC), donc les droites (BC) et (RT) sont parallèles.

c. Dans les triangles ART et ABC :
• T appartient à [AB] et R à [AC],
• les droites (BC) et (RT) sont parallèles.
Donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AR}{AC} = \frac{AT}{AB} \quad \text{soit} \quad \frac{4{,}5}{6} = \frac{AT}{6{,}5}$$

D'où $AT = 6{,}5 \times \frac{4{,}5}{6} = 4{,}875$.

Donc $AT = 4{,}875$ cm.

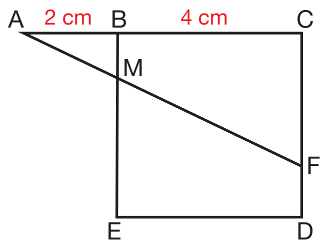
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....

Note ..... / .....

FICHE
83 Perfectionnement

★★★

1 On considère le croquis ci-dessous qui ne respecte pas toutes les données de l'énoncé.



- BCDE est un carré de côté 4 cm.
- Les points A, B, C sont alignés et AB = 2 cm.
- F est un point du segment [CD].
- La droite (AF) coupe le segment [BE] en M.

Déterminer la longueur CF par calcul ou par construction pour que les longueurs BM et FD soient égales.

BCDE est un carré donc les droites (BE) et (CD) sont parallèles.
De plus B appartient à [AC] et M à [AF], donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{CF} \quad \text{soit} \quad \frac{BM}{CF}=\frac{2}{6}$$

Donc $\frac{BM}{CF}=\frac{1}{3}$ *c'est-à-dire* $BM=\frac{1}{3}\times CF$

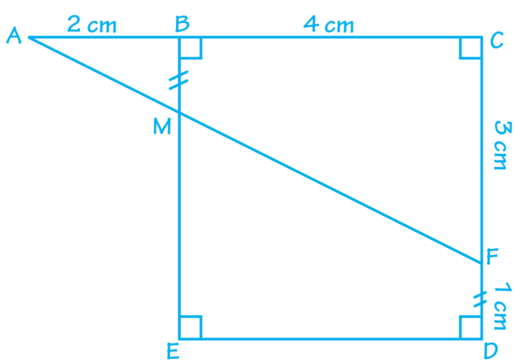
Pour avoir BM = FD, on doit donc avoir

$\frac{1}{3}\times CF=FD.$

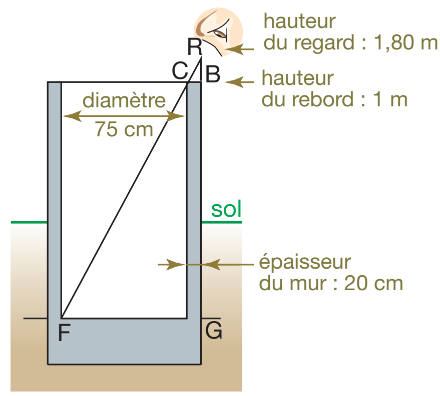
Or $CF+FD=4$ *soit* $CF+\frac{1}{3}\times CF=4$

$\frac{4}{3}\times CF=4$

Donc CF = 3 cm.
Ainsi pour avoir BM = FD on doit placer le point F sur [CD] de façon que CF = 3 cm.



2 Un jeune berger se trouve au bord d'un puits de forme cylindrique dont le diamètre vaut 75 cm : il aligne son regard avec le bord supérieur du puits et le fond du puits pour en estimer la profondeur.
Le fond du puits et le rebord sont horizontaux.
Le puits est vertical.



a. En s'aidant du schéma ci-dessus (qui n'est pas à l'échelle), donner, en m, les longueurs CB, FG et RB.

b. Calculer la profondeur BG du puits.

c. Le berger s'aperçoit que la hauteur d'eau dans le puits est 2,60 m. Or, il a besoin de 1 m³ d'eau pour abreuver tous ses moutons.
En trouvera-t-il suffisamment dans ce puits ?

a. *Par lecture sur la figure :*
- *CB = 20 cm = 0,2 m*
- *FG = 75 cm + 20 cm = 95 cm = 0,95 m*
- *RB = 1,8 m – 1 m = 0,8 m*

b. *Dans les triangles RCB et RFG :*
- *C appartient à [RF] et B appartient à [RG],*
- *les droites (CB) et (FG) sont parallèles.*

Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{RB}{RG}=\frac{CB}{FG} \quad \text{soit} \quad \frac{0,8}{RG}=\frac{0,2}{0,95}$$

Donc $0,2\times RG=0,8\times 0,95$

et $RG=\frac{0,8\times 0,95}{0,2}=3,8$ *soit* $RG=3,8$ m.

Donc BG = 3,8 m – 0,8 m = 3 m.

c. $V=\pi\times\left(\frac{0,75}{2}\right)^2\times 2,6$ *soit* $V\approx 1,15\ \text{m}^3$

1,15 m³ > 1 m³ donc le berger aura assez d'eau dans le puits pour abreuver tous ses moutons.

Sections planes de solides

Chapitre 13

CALCUL MENTAL	• .... • .... • .... • .... •	Note
	• .... • .... • .... • .... •	..... / .....

FICHE 84

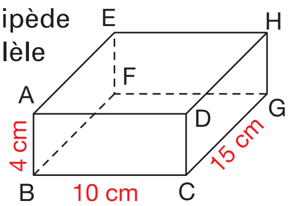
Sections d'un parallélépipède rectangle, d'un cylindre

SOCLE

- La section d'un **parallélépipède rectangle** par un plan parallèle à une face ou à une arête est un **rectangle**.
- La section d'un **cylindre** par :
  - un plan **perpendiculaire** à son axe est un **cercle** de même rayon que la base ;
  - un plan **parallèle** à son axe est un **rectangle** dont une dimension est la hauteur du cylindre.

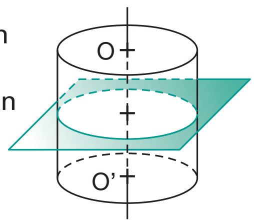
★

1 On coupe ce parallélépipède rectangle par un plan parallèle à la face DCGH.
Quelle est la nature de la section ?
Quelles en sont les dimensions ?



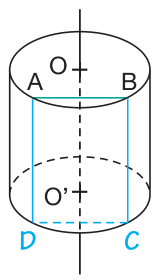
La section est un rectangle de 15 cm sur 4 cm.

2 On a représenté la section d'un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 6 cm par un plan perpendiculaire à l'axe (OO').
Quelle est la nature de cette section ?

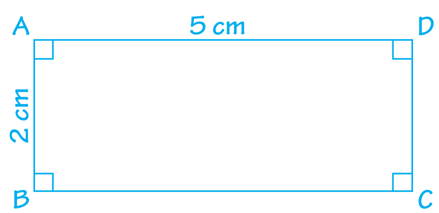


La section est un cercle de rayon 2 cm.

3 **a.** Tracer sur ce cylindre sa section ABCD par un plan parallèle à l'axe (OO') et qui passe par les points A et B.



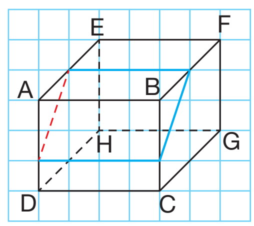
b. Le cylindre a un rayon de 2,5 cm et une hauteur de 5 cm.
De plus AB = 2 cm.
Tracer la section ABCD en vraie grandeur.



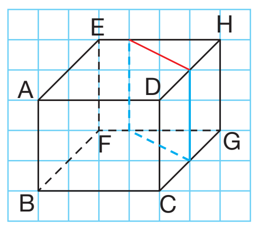
★★

4 Dans chaque cas, terminer le tracé de la section du parallélépipède rectangle par le plan parallèle à l'arête [AB] et qui contient le segment rouge.

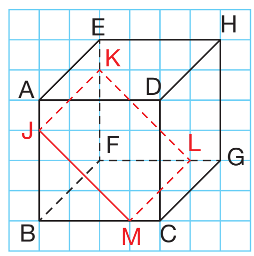
a.



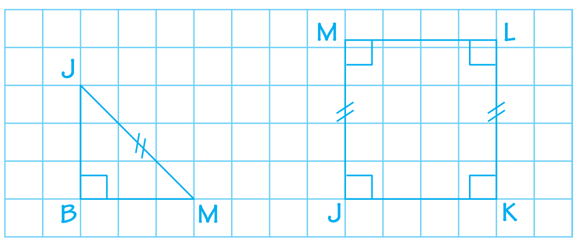
b.



5 On a représenté la section du cube ABCDEFGH d'arête 2 cm par un plan qui est parallèle à l'arête [CG].



a. Construire en vraie grandeur le triangle BJM et, à côté, la section JKLM.



b. Calculer, en cm, la valeur exacte de JM.
En donner la valeur approchée par défaut au dixième près.

Le triangle BJM est rectangle en B donc d'après l'égalité de Pythagore :
$JM^2 = BJ^2 + BM^2 = 1{,}5^2 + 1{,}5^2 = 4{,}5$.
Donc $JM = \sqrt{4{,}5}$ cm et $JM \approx 2{,}1$ cm.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note ..... / .....

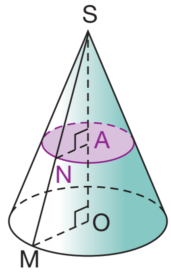
FICHE

85 Sections d'un cône de révolution, d'une pyramide

- La section d'un **cône de révolution** par un plan parallèle à sa base est un **cercle** qui est une **réduction** du cercle de base.
- La section d'une **pyramide** par un plan parallèle à sa base est une **réduction de la base**.

★

1 Ce cône de révolution de sommet S a pour base un disque de centre O et de rayon 4 cm.
Sa hauteur [SO] mesure 10 cm.
A appartient à [SO] et SA = 6 cm.
Le plan parallèle à la base qui passe par A coupe une génératrice [SM] au point N.



a. Quelle est la nature de la section ?

La section est le cercle de centre A et de rayon AN.

b. Cette section est une réduction de rapport k du cercle de base. Calculer ce rapport k.

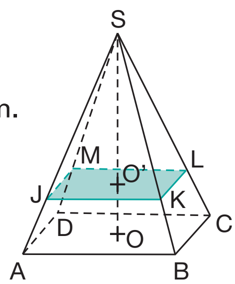
$k = \frac{SA}{SO} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

c. Calculer le rayon de la section.

$AN = k \times OM = 0{,}6 \times 4 \text{ cm} = 2{,}4 \text{ cm}.$

Le rayon de la section est 2,4 cm.

2 La pyramide SABCD a pour base le rectangle ABCD tel que AB = 12 cm et AD = 8 cm.
La hauteur [SO] mesure 16 cm.
On coupe la pyramide par un plan parallèle à sa base passant par le point O' de [SO] tel que SO' = 12 cm.



a. Quelle est la nature de la section JKLM ?

La section JKLM est un rectangle.

b. Cette section est une réduction de rapport k de la base. Calculer ce rapport k.

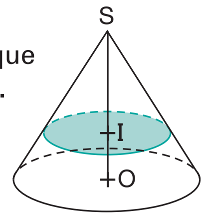
$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{12}{16} = 0{,}75$

c. Calculer les dimensions de la section JKLM.

$JK = k \times AB = 0{,}75 \times 12 \text{ cm} = 9 \text{ cm}.$
$JM = k \times AD = 0{,}75 \times 8 \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$
JKLM est un rectangle de dimensions 8 cm et 6 cm.

★★

3 Ce cône de révolution de sommet S a pour base un disque de centre O et de rayon r = 15 cm.
Sa hauteur [SO] mesure 24 cm.
On coupe ce cône par un plan parallèle à la base et passant par un point I du segment [SO].



a. On suppose ici que SI = 7,2 cm.
Calculer le rayon r' de la section.

b. On suppose ici que le rayon r' de la section est 6 cm. Calculer la longueur SI.

La section est une réduction de rapport k du cercle de base.

a. Ici $k = \frac{SI}{SO} = \frac{7{,}2}{24} = 0{,}3.$
$r' = k \times r = 0{,}3 \times 15 \text{ cm}$ Donc $r' = 4{,}5$ cm.

b. Ici $k = \frac{r'}{r} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$
On a aussi $k = \frac{SI}{SO} = \frac{SI}{24}.$ D'où $\frac{SI}{24} = \frac{2}{5}.$
$SI = 24 \times \frac{2}{5} = 9{,}6.$ Donc SI = 9,6 cm.

4 On coupe une pyramide de sommet S et de hauteur SO = 20 cm par un plan parallèle à sa base qui passe par le point M de [SO] tel que SM = 4 cm.
Dans chaque cas, donner la nature et les dimensions de la section.

a. La base est un carré ABCD de côté 15 cm.

b. La base est un triangle équilatéral EFG de côté 12 cm.

Dans chaque cas, la section est une réduction de la base de rapport $k = \frac{SM}{SO} = \frac{4}{20} = 0{,}2.$

a. *La section est un carré A'B'C'D'.*
$A'B' = k \times AB = 0{,}2 \times 15 \text{ cm} = 3 \text{ cm}.$
Le côté du carré A'B'C'D' mesure 3 cm.

b. *La section est un triangle équilatéral E'F'G'.*
$E'F' = k \times EF = 0{,}2 \times 12 \text{ cm} = 2{,}4 \text{ cm}.$
Le côté du triangle E'F'G' mesure 2,4 cm.

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE

86 Calculs d'aires et de volumes

Dans une réduction ou un agrandissement de rapport ***k*** :
- l'**aire** d'une surface est multipliée par k^2 ;
- le **volume** d'un solide est multiplié par k^3.

★

1 **1.** Un cône de révolution a pour hauteur SO = 5 cm et un rayon de base de 3 cm. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la base.

2. On coupe le cône par un plan parallèle à la base et passant par le point M de [SO] tel que SM = 2 cm.

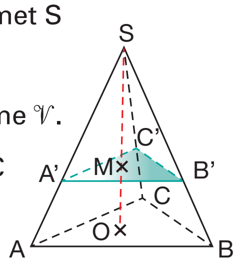
a. La section est une réduction de la base. Quel est le rapport *k* de réduction ?

b. Par quel nombre faut-il multiplier l'aire $\mathscr{A}$ pour obtenir l'aire $\mathscr{A}'$ de la section ?

c. Calculer l'aire $\mathscr{A}'$ de la section.

1. $\mathscr{A} = \pi \times 3^2$ donc $\mathscr{A} = 9\pi$ cm².
2. a. $k = \frac{SM}{SO} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.
b. Dans une réduction de rapport *k*, l'aire d'une surface est multipliée par k^2 donc il faut multiplier $\mathscr{A}$ par $0{,}4^2$ (c'est-à-dire par 0,16).
c. $\mathscr{A}' = k^2 \times \mathscr{A}$ soit $\mathscr{A}' = 0{,}4^2 \times 9\pi$
Donc $\mathscr{A}' = 1{,}44\pi$ cm².

2 **1.** Cette pyramide de sommet S a pour base un triangle d'aire $\mathscr{A}$ = 25 cm² et pour hauteur SO = 15 cm. Calculer son volume $\mathscr{V}$.



2. On coupe la pyramide SABC par un plan parallèle à sa base et passant par le point M de [SO] tel que SM = 9 cm.
On obtient ainsi la pyramide SA'B'C' qui est une réduction de rapport *k* de la pyramide SABC.

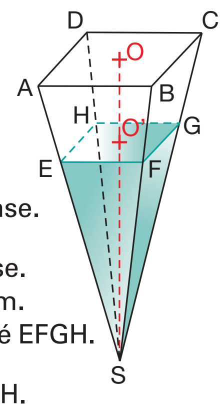
a. Calculer la valeur de *k*.

b. Calculer le volume $\mathscr{V}'$ de la pyramide SA'B'C'.

1. $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A} \times SO = \frac{1}{3} \times 25 \times 15$. Donc $\mathscr{V} = 125$ cm³.
2. a. $k = \frac{SM}{SO} = \frac{9}{15} = 0{,}6$.
b. Dans une réduction de rapport *k*, le volume d'un solide est multiplié par k^3. D'où :
$\mathscr{V}' = k^3 \times \mathscr{V} = 0{,}6^3 \times 125 = 27$. Donc $\mathscr{V}' = 27$ cm³.

★★

3 On a représenté un vase qui a la forme d'une pyramide de base le carré ABCD et de hauteur [SO]. On donne : AB = 12 cm et SO = 36 cm.



1. Calculer le volume $\mathscr{V}$ de ce vase.

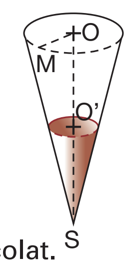
2. On verse de l'eau dans ce vase. La hauteur SO' de l'eau est 24 cm. La surface de l'eau forme un carré EFGH.

a. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du carré EFGH.

b. Calculer le volume $\mathscr{V}'$ de l'eau puis exprimer ce volume en centilitres.

1. $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times$ Aire ABCD $\times SO = \frac{1}{3} \times 12^2 \times 36$
Donc $\mathscr{V} = 1\,728$ cm³.
2. a. EFGH est une réduction de rapport *k* de ABCD avec $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.
$\mathscr{A} = k^2 \times AB^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 12^2 = 64$.
Donc l'aire de EFGH est 64 cm².
b. L'eau est une réduction du vase de rapport $\frac{2}{3}$.
$\mathscr{V}' = k^3 \times \mathscr{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 1\,728 = 512$.
Donc $\mathscr{V}' = 512$ cm³ $= 0{,}512$ L $= 51{,}2$ cL.

4 Un cône a pour rayon OM = 3 cm et pour hauteur OS = 14 cm.



a. Calculer le volume $\mathscr{V}$ de ce cône.

b. On verse du chocolat dans ce cône, jusqu'au milieu O' de [SO]. Calculer le volume $\mathscr{V}'$ du cône formé par le chocolat.

a. $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 14 = 42\pi$.
$\mathscr{V} = 42\pi$ cm³.
b. Le chocolat est une réduction du cône de rapport $\frac{1}{2}$ donc $\mathscr{V}' = k^3 \times \mathscr{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 42\pi = 5{,}25\pi$.
$\mathscr{V}' = 5{,}25\pi$ cm³.

FICHE 87

OBJECTIF BREVET

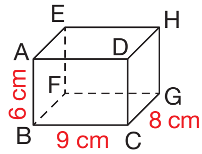
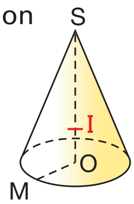
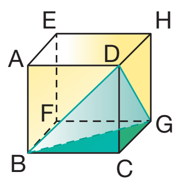
Sélection de sujets de Brevet

★★

Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

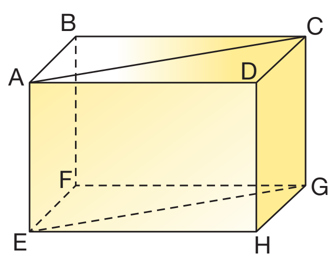
Note ..... / 5

QCM

A	La section de ce parallélépipède rectangle par un plan parallèle… 	à la face ABCD est un rectangle de dimensions 6 cm et 9 cm	à l'arête [AE] est un rectangle de dimensions 6 cm et 8 cm	à l'arête [AD] passant par les points C et H est un rectangle de dimensions 9 cm et 10 cm
B	On considère un cylindre de révolution de diamètre 10 cm et de hauteur OO′ = 14 cm. Alors…	sa section par un plan parallèle à sa base est un cercle de rayon 10 cm	sa section par un plan passant par O et O′ est un rectangle de dimensions 10 cm et 14 cm	le volume de ce cylindre est 350π cm^3
C	Ce cône de révolution a pour rayon OM = 20 cm et pour hauteur SO = 48 cm. I est un point de [SO]. Alors… 	le volume de ce cône est $6{,}4\pi$ dm^3	si SI = 36 cm alors la section du cône par un plan parallèle à la base et passant par le point I est un cercle de rayon15 cm	si la section du cône par un plan parallèle à la base et passant par le point I est un cercle de longueur 20π cm alors I est le milieu de [SO]
D	SABCD est une pyramide régulière de hauteur SO = 8 cm et de base un carré de côté 9 cm et de centre O. Alors…	le volume de la pyramide SABCD est 648 cm^3	le volume de la pyramide SABCD est 0,216 L	la section de cette pyramide par un plan parallèle à sa base et passant par le milieu de [SO] est un carré d'aire 40,5 cm^2
E	ABCDEFGH est un cube. La section de la pyramide BCDG par un plan parallèle à la face ABCD est… 	un carré	un triangle rectangle isocèle	une réduction du triangle BCD

1 Voir dans l'espace

On considère ce pavé droit ABCDEFGH.



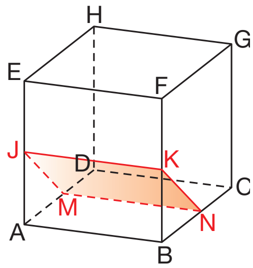
Observer la figure et compléter le tableau ci-contre sans justification.

D'après *DNB*

Objet	Nature de l'objet
Triangle ABC	Rectangle en B
Angle $\widehat{ABF}$	Angle droit
Quadrilatère ABFE	Rectangle
Angle $\widehat{ACG}$	Angle droit
Quadrilatère ACGE	Rectangle

2 ▶ Représenter en vraie grandeur

ABCDEFGH est un cube.
Les points J, K, M et N sont les milieux respectifs des segments [AE], [BF], [AD] et [BC].
JKNM est une section du cube par un plan parallèle à l'arête [AB].



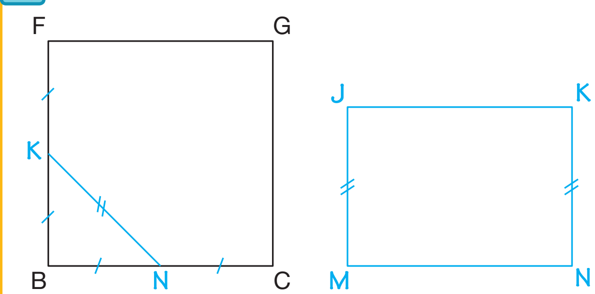
1. Donner, sans justifier, la nature de JKNM.

JKNM est un rectangle.

2. Sur le schéma ci-après, la face FGCB a été dessinée en vraie grandeur.

a. Placer les points K et N sur cette face.

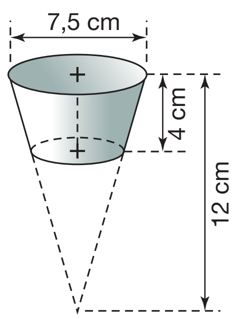
b. À côté, dessiner la section JKNM en vraie grandeur.



D'après *DNB*

3 ▶ Prendre des initiatives

Un moule à gâteaux a la forme du tronc de cône représenté ci-contre.
Montrer que le volume de ce moule est d'environ 125 cm^3.

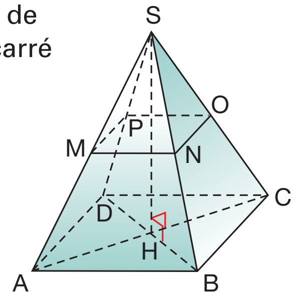


D'après *DNB*

• Volume V_1 du grand cône.
$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3{,}75^2 \times 12 = 56{,}25\pi$
Donc $V_1 = 56{,}25$ cm^3.
• Volume V_2 du petit cône :
12 cm $- 4$ cm $= 8$ cm
donc la hauteur du petit cône est 8 cm.
Le petit cône est une réduction de rapport k du grand cône avec $k = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
$V_2 = k^3 \times V_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 56{,}25\pi$. Donc $V_2 = \frac{50}{3}\pi$ cm^3.
• Volume V du moule :
$V = V_1 - V_2 = 56{,}25\pi - \frac{50}{3}\pi$. Donc $V \approx 124$ cm^3.

4 ▶ Utiliser une réduction

Cette pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD a un volume $\mathcal{V}$ égal à 108 cm^3.
SH = 9 cm.



1. a. Vérifier que l'aire de ABCD est 36 cm^2.

b. En déduire AB.

2. La pyramide SMNOP est une réduction de la pyramide SABCD.
L'aire du carré MNOP est égale à 4 cm^2.
Calculer le volume $\mathcal{V}'$ de la pyramide SMNOP.

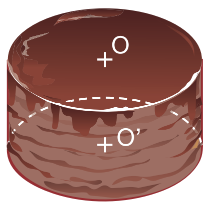
D'après *DNB*

1. a. $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times$ Aire ABCD $\times$ SH
$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 36 \times 9$. Donc $\mathcal{V} = 108$ cm^3.
L'aire de ABCD est bien 36 cm^2.
b. $AB^2 = 36$ d'où $AB = \sqrt{36} = 6$.
Donc AB = 6 cm.

2. • MNOP est une réduction du carré ABCD.
Dans une réduction de rapport k, l'aire d'une surface est multipliée par k^2
donc $k^2 \times$ Aire ABCD = Aire MNOP.
C'est-à-dire $k^2 = 4/36$ soit $k^2 = \frac{1}{9}$.
Donc $k = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.
• Dans une réduction de rapport k, le volume d'un solide est multiplié par k^3 donc
$\mathcal{V}' = k^3 \times \mathcal{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 108 = \frac{1}{27} \times 108 = 4$.
Donc $\mathcal{V}' = 4$ cm^3.

5 ▶ Utiliser la section d'un cylindre

Cette glace a la forme d'un cylindre de hauteur OO′ = 8 cm et de rayon 6 cm.



a. Son volume est-il supérieur à 1 L? Justifier.

b. On coupe la glace selon un plan passant par O et O′. Calculer l'aire de la section.

D'après *DNB*

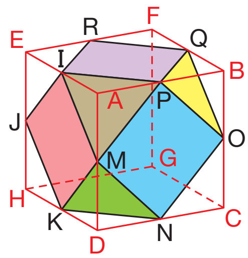
a. $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 6^2 \times 8 = 288\pi$.
Donc $V \approx 905$ cm^3 c'est-à-dire $V \approx 0{,}905$ L.
Le volume de la glace est inférieur à 1 L.
b. La section est un rectangle de dimensions 8 cm et 12 cm.
$8 \times 12 = 96$
Donc l'aire de la section est 96 cm^2.

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... • .... Note ..... / .....

FICHE
88 Perfectionnement

★★★

1 On coupe un cube ABCDEFGH d'arête 12 cm par des plans passant par les milieux des arêtes.



1. a. Indiquer sans justification la nature :
- du quadrilatère PMNO ;
- du triangle IPM.

b. Combien de faces et combien d'arêtes possède le solide obtenu ?

2. a. Calculer le volume $\mathcal{V}_1$ du cube ABCDEFGH.

b. Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ de la pyramide MIAP en considérant que cette pyramide a pour sommet M, pour hauteur [MA] et pour base le triangle IAP.

c. En déduire le volume $\mathcal{V}$ du solide obtenu.

3. a. Calculer la valeur exacte de la longueur PM.

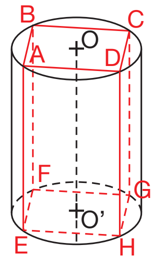
b. En déduire l'aire $\mathcal{A}_1$ du carré PMNO.

c. En utilisant l'information ci-dessous, calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle IPM.
L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est :

$$a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

1. a. • PMNO est un carré.
• IPM est un triangle équilatéral.
b. Ce solide a 14 faces (6 carrés et 8 triangles équilatéraux) et 24 arêtes.
2. a. $\mathcal{V}_1 = 12^3 = 1\,728$ donc $\mathcal{V}_1 = 1\,728$ cm^3.
b. • Aire IAP $= \dfrac{\text{AI} \times \text{AP}}{2} = \dfrac{6 \times 6}{2} = 18$.
Donc Aire IAP = 18 cm^2.
• $\mathcal{V}_2 = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire IAP} \times \text{AM} = \dfrac{1}{3} \times 18 \times 6$.
Donc $\mathcal{V}_2 = 36$ cm^3.
c. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - 8 \times \mathcal{V}_2 = 1\,728 - 8 \times 36 = 1\,440$.
Donc $\mathcal{V} = 1\,440$ cm^3.
3. a. Le triangle PAM est rectangle en A donc d'après l'égalité de Pythagore :
$\text{PM}^2 = \text{AP}^2 + \text{AM}^2 = 6^2 + 6^2 = 72$.
Donc PM $= \sqrt{72}$ cm.
b. $\mathcal{A}_1 = \text{PM}^2 = \left(\sqrt{72}\right)^2 = 72$.
Donc $\mathcal{A}_1 = 72$ cm².
c. $\mathcal{A}_2 = \left(\sqrt{72}\right)^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 72 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$
Donc $\mathcal{A}_2 = 18\sqrt{3}$ cm².

2 On découpe un tronc d'arbre cylindrique de rayon OA = 30 cm et de hauteur OO'= 1,5 m pour obtenir la poutre ABCDEFGH, qui est un parallélépipède rectangle tel que BA = 36 cm.



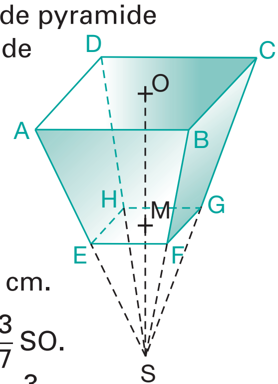
a. • Quelle est la nature du triangle ABC ?
• Quelle est la longueur AC ?

b. Calculer la longueur BC.

c. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ de la section BCGF.

a. • Le triangle ABC est rectangle en B.
• [AC] est un diamètre du cercle de base donc AC = 2 × 30 cm = 60 cm.
b. D'après l'égalité de Pythagore :
$\text{AC}^2 = \text{BA}^2 + \text{BC}^2$ c'est-à-dire $60^2 = 36^2 + \text{BC}^2$.
$\text{BC}^2 = 60^2 - 36^2 = 2\,304$ et BC = 48 cm.
c. $\mathcal{A} = \text{BC} \times \text{CG} = 48 \times 150 = 7\,200$.
Donc l'aire de la section BCGF est 7 200 cm^2.

3 ABCDEFGH est un tronc de pyramide obtenu en coupant la pyramide régulière SABCD par un plan parallèle à sa base.
ABCD et EFGH sont deux carrés de centres O et M.
On donne : AB = 70 cm, EF = 30 cm, OM = 60 cm.
On note h la longueur SO en cm.



a. Expliquer pourquoi SM $= \dfrac{3}{7}$ SO.

b. Expliquer pourquoi $h - 60 = \dfrac{3}{7}h$ puis calculer h.

a. La pyramide SEFGH est une réduction de la pyramide SABCD.
Le rapport de cette réduction est : $\dfrac{\text{SM}}{\text{SO}} = \dfrac{\text{EF}}{\text{AB}}$.
C'est-à-dire $\dfrac{\text{SM}}{\text{SO}} = \dfrac{30}{70} = \dfrac{3}{7}$.
$7 \times \text{SM} = 3 \times \text{SO}$ et donc SM $= \dfrac{3}{7}$SO.
b. • SM = SO − OM. C'est-à-dire SM $= h - 60$.
L'égalité SM $= \dfrac{3}{7}$SO devient alors $h - 60 = \dfrac{3}{7}h$.
• $h - 60 = \dfrac{3}{7}h$ donc $h - 60 - \dfrac{3}{7}h = 0$.
$\dfrac{4}{7}h - 60 = 0$ d'où $\dfrac{4}{7}h = 60$
$\dfrac{7}{4} \times \dfrac{4}{7}h = \dfrac{7}{4} \times 60$ d'où $h = 105$ cm.

Sphères et boules

Chapitre 14

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE 89

Définir une sphère, une boule

SOCLE

- La **sphère de centre O et de rayon R** est formée des points M de l'espace tels que **OM** = **R**.
- La **boule de centre O et de rayon R** est formée des points M de l'espace tels que **OM** ⩽ **R**.

★

1 Dans chaque cas, préciser si l'objet peut être assimilé à une sphère ou à une boule.

a. Une bulle de savon : une sphère

b. La Lune : une boule

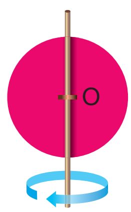
c. Une orange : une boule

d. Un ballon de basket : une sphère

2 $\mathscr{S}$ est une sphère de centre O, de rayon 5 cm. $\mathscr{B}$ est la boule de même centre et de même rayon.
A, B et C sont des points de l'espace tels que :
OA = 4 cm, OB = 5 cm, OC = 6 cm.
Cocher les affirmations exactes.

☐ O appartient à $\mathscr{S}$	☒ O appartient à $\mathscr{B}$
☐ A appartient à $\mathscr{S}$	☒ A appartient à $\mathscr{B}$
☒ B appartient à $\mathscr{S}$	☒ B appartient à $\mathscr{B}$
☐ C appartient à $\mathscr{S}$	☐ C appartient à $\mathscr{B}$

3 **a.** Quel solide obtient-on en faisant tourner un disque de centre O et de rayon 3 cm autour d'un de ses diamètres ?



Une boule de centre O

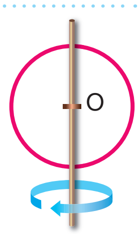
et de rayon 3 cm.

b. Quelle autre figure pourrait-on faire tourner pour obtenir ce même solide ?

On pourrait faire tourner un demi-disque

autour de son diamètre.

c. Quel solide obtient-on en faisant tourner un cercle de centre O et de rayon 3 cm autour d'un de ses diamètres ?



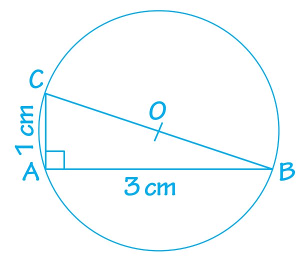
Une sphère de centre O et de rayon 3 cm.

★★

4 ABC est un triangle isocèle de l'espace tel que AB = AC = 4 cm. M est le milieu de [BC].
$\mathscr{S}$ est la sphère de centre A et de rayon 4 cm.
$\mathscr{B}$ est la boule de même centre et de même rayon.
Cocher l'(les) affirmation(s) correcte(s).

☐ M appartient à $\mathscr{S}$.
☒ M appartient à $\mathscr{B}$.
☐ M est à l'extérieur de $\mathscr{S}$.

5 **a.** Construire un triangle ABC rectangle en A, tel que AB = 3 cm et AC = 1 cm.



b. Décrire le solide obtenu en faisant tourner ce triangle autour de la droite (AB).

On obtient un cône d'axe (AB), de hauteur 3 cm.

Le rayon de sa base est AC = 1 cm.

c. Construire le cercle circonscrit à ce triangle.

d. Autour de quel côté du triangle faut-il faire tourner ce cercle pour obtenir une sphère ? Indiquer le centre de la sphère et donner, en cm, la valeur arrondie au dixième de son rayon R.

d. • On tourne autour du diamètre [BC].
• Le centre de la sphère est le milieu de [BC].
L'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ d'où $BC^2 = 3^2 + 1^2 = 10$
$BC = \sqrt{10}$ d'où $R = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ cm. $R \approx 1{,}6$ cm.

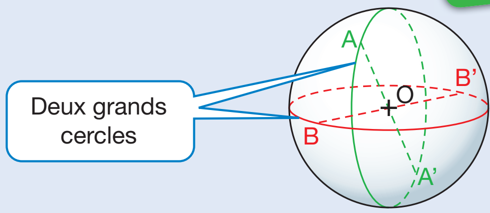
CALCUL MENTAL
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
Note ..... / .....

FICHE

90 Représenter une sphère et ses grands cercles

SOCLE

- Un **diamètre** [AA′] d'une sphère de centre O est un segment de milieu O et d'extrémités deux points de la sphère, diamétralement opposés.
- Un **grand cercle** d'une sphère est un cercle de même centre et de même rayon que la sphère.



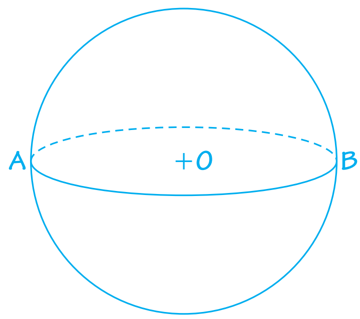
★

1 On se propose de représenter une sphère.

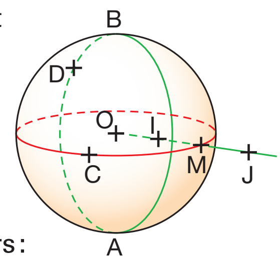
a. Tracer un cercle de centre O.

b. Placer deux points A et B diamétralement opposés.

c. Tracer à main levée un grand cercle passant par A et B. Penser aux pointillés !



2 $\mathcal{S}$ est une sphère de centre O et de rayon 3 cm. Les cercles rouge et vert sont deux grands cercles.
D est un point du cercle vert de diamètre [AB].
C et M sont deux points du cercle rouge.
Les points O, I, M et J sont alignés dans cet ordre.



1. Que sait-on des longueurs :

a. AB = 6 cm **b.** OC = 3 cm **c.** OD = 3 cm

d. OI < 3 cm **e.** OJ > 3 cm **f.** OM = 3 cm

2. Citer les points de la figure qui appartiennent

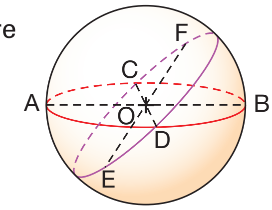
a. à la sphère $\mathcal{S}$. A, B, C, D, M.

b. à la boule de centre O et de rayon 3 cm.

A, B, C, D, M, O, I

★★

3 On a représenté ci-contre une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 5 cm et deux de ses grands cercles.
[AB], [CD] et [EF] sont trois diamètres de la sphère.



a. Pourquoi le triangle AOE est-il isocèle ?

A et E sont deux points de la sphère S

donc OA = OE = 5 cm.

b. Quelle est la nature du quadrilatère CEDF ?

[CD] et [EF] sont deux diamètres du grand cercle violet ; ils ont donc la même longueur 10 cm et le même milieu O.
Donc CEDF est un rectangle.

4 **1.** Représenter en perspective une sphère de 3 cm de diamètre et de centre O.

2. Placer sur cette sphère deux points A et B diamétralement opposés.

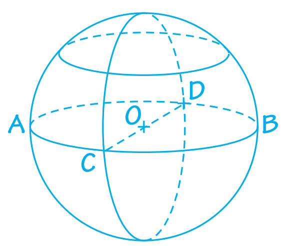
3. a. Placer un point C situé à 1,5 cm de O.

b. Placer le point D diamétralement opposé à C.

4. Tracer à main levée :

a. un grand cercle de la sphère passant par C.

b. un cercle qui n'est pas un grand cercle.

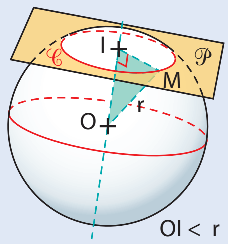


CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● ....
● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note ..... / .....

FICHE

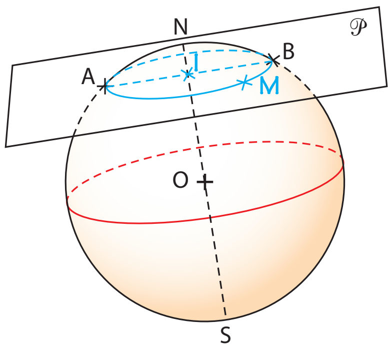
91 Sections planes d'une sphère

La section d'une sphère par un plan est un cercle.
La section de la sphère par le plan $\mathscr{P}$ est le cercle $\mathscr{C}$.
Son centre I est le point d'intersection du plan et de la perpendiculaire à ce plan passant par O.
OI est la distance de O au plan.



★

1 S $\mathscr{P}$ est un plan perpendiculaire au diamètre [NS] de la sphère représentée ci-dessous.



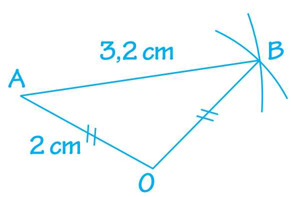
1. a. Quelle est la nature de la section de la sphère par le plan $\mathscr{P}$? Un cercle.

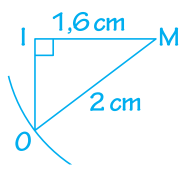
b. Compléter la figure en dessinant cette section à main levée. Placer le centre I de cette section.

2. a. Placer un point M de cette section.
Quelle est la nature du triangle OIM ?

Il est rectangle en I.

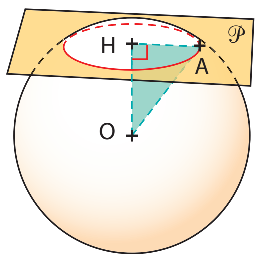
b. On sait que le rayon de la sphère est 2 cm et que [AI] mesure 1,6 cm.
Construire en vraie grandeur les triangles OAB et OIM.





★★

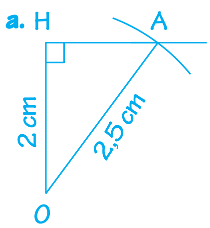
2 On a représenté ci-dessous une sphère de centre O et de rayon 2,5 cm.
Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère selon un cercle de centre H avec OH = 2 cm.



a. Sans effectuer de calcul, tracer le triangle OHA en vraie grandeur.

b. Calculer le rayon de la section.

a.



b. L'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$OA^2 = HO^2 + HA^2$
$2{,}5^2 = 2^2 + HA^2$
$HA^2 = 2{,}5^2 - 2^2$
$HA^2 = 2{,}25$
D'où HA = 1,5 cm.

3 Une sphère de centre O et de rayon 7 cm est coupée par un plan selon un cercle de centre I et de diamètre [AB] tel que AB = 12 cm.
Calculer la distance OI, en cm, puis donner son arrondi au dixième.

Le triangle OIA est rectangle en I.
L'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$OA^2 = IO^2 + IA^2$ soit $7^2 = IO^2 + 6^2$
$IO^2 = 7^2 - 6^2 = 13$
$IO = \sqrt{13}$ d'où $IO \approx 3{,}6$ cm.

CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....

Note ..... / .....

FICHE

92 Aire d'une sphère

L'aire d'une sphère de rayon R est $\mathcal{A} = \mathbf{4\,\pi\,R^2}$.

★

1 Une sphère a un diamètre de 14 cm.

a. Calculer le rayon R de cette sphère.

$R = 14$ cm $: 2 = 7$ cm.

b. Calculer la valeur exacte de son aire $\mathcal{A}$ en cm².

$\mathcal{A} = 4\,\pi\,R^2$ donc ici $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 7^2$

$\mathcal{A} = 196\,\pi$ cm².

c. Donner l'arrondi de cette aire à l'unité.

$\mathcal{A} \approx 616$ cm².

2 Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ d'une sphère de rayon R égal à :

a. 3 cm **b.** 2,5 dm

a. $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 3^2$ donc $\mathcal{A} = 36\,\pi$ cm².
b. $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 2{,}5^2$ donc $\mathcal{A} = 25\,\pi$ dm².

3 Calculer en cm², l'arrondi à l'unité de l'aire $\mathcal{A}$ d'une sphère de rayon R égal à :

a. 3,6 cm **b.** 2 cm

a. $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 3{,}6^2$ donc $\mathcal{A} = 51{,}84\,\pi$ cm².
$\mathcal{A} \approx 163$ cm².
b. $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 2^2$ donc $\mathcal{A} = 16\,\pi$ cm².
$\mathcal{A} \approx 50$ cm².

4 Le butane et le propane peuvent être stockés dans des sphères.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en m², de cette sphère de diamètre 18 m.
En donner l'arrondi à l'unité.

Rayon $R = 18$ m $: 2 = 9$ m
$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 9^2$ donc $\mathcal{A} = 324\,\pi$ m².
$\mathcal{A} \approx 1\,018$ m².

★★

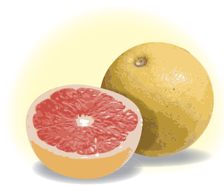
5 Un prototype de générateur d'énergie solaire en verre a une forme sphérique de 50 cm de rayon.
Donner l'arrondi au dixième de l'aire $\mathcal{A}$, en m², de la surface de verre.

$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 50^2$ donc $\mathcal{A} = 10\,000\,\pi$ cm².

$\mathcal{A} \approx 31\,416$ cm² soit $\mathcal{A} \approx 3{,}1$ m².

6 On assimile la peau d'un pamplemousse à une sphère.

a. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ de la peau d'un pamplemousse de diamètre 12 cm.



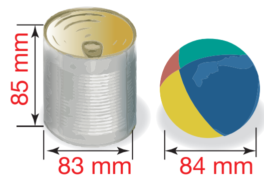
Rayon $R = 12$ cm $: 2 = 6$ cm

$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 6^2$ donc $\mathcal{A} = 144\,\pi$ cm².

b. En déduire l'arrondi à l'unité, en cm², de l'aire $\mathcal{A}'$ de la peau d'un demi-pamplemousse de diamètre 12 cm.

$\mathcal{A}' = 144\,\pi$ cm² $: 2$ d'où $\mathcal{A}' = 72\,\pi$ cm². $\mathcal{A} \approx 226$ cm².

7 Lola affirme : « La surface latérale de la boîte de conserves et la surface de ma balle ont la même aire ». A-t-elle raison ?



• Aire de la surface latérale de la boite :
Cette surface est un rectangle de longueur 83π mm et de hauteur 85 mm.
$\mathcal{A}_1 = 83\,\pi \times 85$ d'où $\mathcal{A}_1 = 7\,055\,\pi$ mm².
• Aire de la surface de la balle :
Rayon $R = 84$ mm $: 2 = 42$ mm
$\mathcal{A}_2 = 4 \times \pi \times 42^2$ d'où $\mathcal{A}_2 = 7\,056\,\pi$ mm².
• $7\,055\,\pi \neq 7\,056\,\pi$ donc Lola a tort.

CALCUL MENTAL ● .... ● .... ● .... ● .... ● .... Note
● .... ● .... ● .... ● .... ● .... / .....

FICHE

93 Volume d'une boule

SOCLE

Le volume d'une boule de rayon R est $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

★

1 Une boule a un rayon de 9 cm.

a. Calculer la valeur exacte de son volume $\mathcal{V}$ en cm^3.

$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$ donc ici $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times 9^3$

$\mathcal{V} = 972\,\pi\ cm^3$.

b. Donner l'arrondi de ce volume à l'unité.

$\mathcal{V} \approx 3\,054\ cm^3$.

2 Une boule a un diamètre de 48 m.

a. Calculer le rayon R de cette boule.

$R = 48\ m : 2 = 24\ m$

b. Calculer la valeur exacte de son volume $\mathcal{V}$ en m^3 puis donner l'arrondi de ce volume au millième.

$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times 24^3$ d'où $\mathcal{V} = 18\,432\,\pi\ m^3$.

$\mathcal{V} \approx 57\,905{,}836\ m^3$.

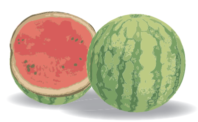
3 Calculer la valeur exacte, en cm^3, du volume $\mathcal{V}$ d'une balle de tennis de table de 40 mm de diamètre, puis en donner l'arrondi au dixième.

Rayon : $R = 40\ mm : 2 = 20\ mm = 2\ cm$

$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{32\pi}{3}\ cm^3$.

$\mathcal{V} \approx 33{,}5\ cm^3$.

4 On peut assimiler une pastèque à une boule.



a. Calculer la valeur exacte du volume $\mathcal{V}$ d'une pastèque de 18 cm de rayon.

$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times 18^3$ donc $\mathcal{V} = 7\,776\,\pi\ cm^3$.

b. En déduire, en cm^3, l'arrondi à l'unité du volume $\mathcal{V}'$ d'une moitié de pastèque de 18 cm de rayon.

$\mathcal{V}' = 7\,776\,\pi\ cm^3 : 2$ d'où $\mathcal{V}' = 3\,888\,\pi\ cm^3$.

$\mathcal{V}' \approx 12\,215\ cm^3$.

★★

5 Trois balles de golf sont rangées dans un tube cylindrique de hauteur 13,5 cm.
Les balles touchent les parois, le fond et le couvercle du tube.

a. Calculer le rayon d'une balle de golf.

Le rayon est : $R = 13{,}5\ cm : 6 = 2{,}25\ cm$.

b. Calculer la valeur exacte du volume $\mathcal{V}_1$ d'une balle de golf.

$V_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}25^3$ d'où $V_1 = 15{,}187\,5\,\pi\ cm^3$.

c. Calculer la valeur exacte du volume $\mathcal{V}_2$ du tube.

$V_2 = \pi \times 2{,}25^2 \times 13{,}5$ d'où $V_2 = 68{,}343\,75\,\pi\ cm^3$.

d. En déduire le volume $\mathcal{V}$, en cm^3, de l'espace laissé libre par les balles. Donner l'arrondi au millième.

$V = V_2 - 3V_1$

donc $V = 68{,}343\,75\,\pi - 3 \times 15{,}187\,5\,\pi$.

$V = 22{,}781\,25\,\pi\ cm^3$. Ainsi $V \approx 71{,}569\ cm^3$.

Le volume de l'espace libre est environ $71{,}569\ cm^3$.

6 Un sculpteur fabrique un umete (récipient en bois) ayant la forme d'une demi-sphère de rayon 15 cm.
Pourra-t-on verser 7 L de lait de coco dans ce umete sans déborder ? Justifier.

Volume $\mathcal{V}$ d'une sphère de rayon 15 cm :
$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times 15^3 = 4\,500\,\pi\ cm^3$.
Le volume d'une demi-sphère est la moitié, soit $2\,250\,\pi\ cm^3$.
$2\,250\,\pi\ cm^3 \approx 7\,069\ cm^3$
Le volume du umete est environ $7\,069\ cm^3$ soit $7{,}069\ dm^3$ ou $7{,}069$ L. $7 < 7{,}069$
Donc on peut y verser 7 L de lait de coco.

FICHE 94

OBJECTIF BREVET

Sélection de sujets de Brevet

★★

QCM

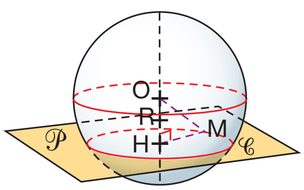
Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

Note ..... / 5

A	L'ensemble des points M tels que OM = 1 m est…	dans le plan, le cercle de centre O et de rayon 1 m	dans l'espace, la sphère de centre O et de rayon 1 m	dans l'espace, la boule de centre O et de rayon 1 m
B	N et S sont deux points diamétralement opposés d'une sphère. Par ces points N et S…	il ne passe aucun grand cercle	il passe un seul grand cercle	il passe plusieurs grands cercles
C	Une sphère a pour centre O et pour diamètre 10 cm. Sa section par un plan situé à 1,4 cm du point O est…	un cercle de rayon 4,8 cm	un cercle de rayon 5 cm	un point
D	Une sphère a pour rayon 6 cm. Son aire (en cm^2) est…	$36\,\pi$	$144\,\pi$	égale à l'aire d'un disque de rayon 12 cm
E	Une boule a 6 cm de diamètre. Son volume est…	$288\,\pi\ cm^3$	$36\,\pi\ cm^3$	proche de $113\ cm^3$

1 Etudier la section d'une sphère par un plan

O est le centre de la sphère.
Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère suivant un cercle $\mathscr{C}$ de centre H et M est un point de ce cercle.
R est le milieu de [OH].



1. Voici deux propositions. Laquelle (lesquelles) est (sont) exacte(s) ? Expliquer.
① Le point R appartient à la boule de centre O et de rayon OM.
② Le point R appartient au plan $\mathscr{P}$.

2. On donne : OM = 3,9 cm et HM = 3,6 cm.

a. Représenter le triangle OHM en vraie grandeur.

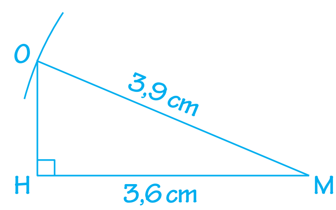
b. Calculer la distance de O au plan $\mathscr{P}$.

c. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, de la surface limitée par le cercle $\mathscr{C}$. Arrondir au centième.

D'après *DNB*

1. Une seule proposition est exacte : ①.
En effet :
• Le point R appartient à un rayon de la sphère, donc la distance OR est inférieure ou égale au rayon de la sphère.
• Le point H appartient au plan $\mathscr{P}$, H et O sont des points distincts, donc le milieu R de [OH] ne peut pas appartenir au plan $\mathscr{P}$.

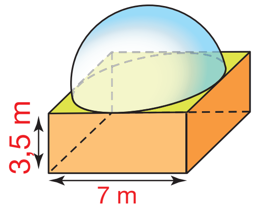
2. a.



b. Dans le triangle rectangle OHM, l'égalité de Pythagore permet d'écrire :
$OM^2 = HO^2 + HM^2$ d'où $3{,}9^2 = HO^2 + 3{,}6^2$
$HO^2 = 3{,}9^2 - 3{,}6^2 = 2{,}25$
ainsi HO = 1,5 cm.
Le point O est à 1,5 cm du plan $\mathscr{P}$.

c. Le disque limité par le cercle $\mathscr{C}$ a pour rayon 3,6 cm.
$\mathscr{A} = \pi \times 3{,}6^2 = 12{,}96\,\pi\ cm^2$.
$\mathscr{A} \approx 40{,}72\ cm^2$.

2 ▶ Calculer des aires



On souhaite repeindre ce bâtiment, composé d'un pavé droit à base carrée, surmonté d'une coupole demi-sphérique.
On repeint :
- les 4 faces latérales du pavé droit ;
- la partie plane du toit (en **vert** sur la figure) ;
- la coupole (de diamètre 7 m).

Les ouvertures, non représentées sur la figure, occupent une surface de 18 m^2.
Montrer que l'aire totale des surfaces à peindre est environ 168 m^2.

D'après *DNB*

- Aire A_1 des faces latérales du pavé droit : $A_1 = (3{,}5 \times 7) \times 4 = 98\ m^2$.
- La partie plane du toit est un carré de côté 7 m dont on a ôté un disque de diamètre 7 m (ou de rayon 3,5 m).
Aire $\mathcal{A}_2$ de la partie plane du toit :
$\mathcal{A}_2 = 7^2 - 3{,}5^2 \times \pi$
$\mathcal{A}_2 = 49 - 12{,}25\,\pi\ m^2$.
$\mathcal{A}_2 \approx 10{,}5\ m^2$.
- Aire $\mathcal{A}_3$ de la coupole (de rayon 3,5 m) :
$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 3{,}5^2 = 24{,}5\,\pi$
$\mathcal{A}_3 \approx 77\ m^2$.
- Aire de la surface à peindre :
$\mathcal{A} \approx 98\ m^2 + 10{,}5\ m^2 + 77\ m^2 - 18\ m^2$
$\mathcal{A} \approx 168\ m^2$

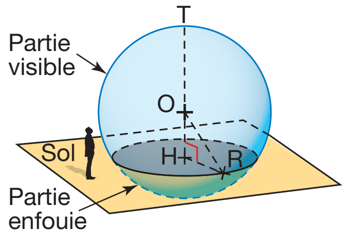
3 ▶ Calculer des volumes

Un laboratoire pharmaceutique produit des gélules de paracétamol.
Une gélule est constituée de deux demi-sphères de 7 mm de diamètre et d'un cylindre de hauteur 14 mm.
Calculer le volume d'une gélule en mm^3.
Arrondir à l'unité.

D'après *DNB*

- Rayon des demi-sphères : 7 mm : 2 = 3,5 mm
- Volume des deux demi-sphères :
$\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}5^3$ d'où $\mathcal{V}_1 \approx 179{,}6\ mm^3$.
- Volume du cylindre :
$\mathcal{V}_2 = \pi \times 3{,}5^2 \times 14$
$\mathcal{V}_2 = 171{,}5\,\pi\ mm^3$ d'où $\mathcal{V}_2 \approx 538{,}8\ mm^3$.
- $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \approx 718\ mm^3$
Le volume d'une gélule est environ 718 mm^3.

4 ▶ Étudier une calotte sphérique



À l'entrée d'un parc de loisirs, se trouve un grand aquarium, dont la vitre a une forme sphérique de 5 m de rayon.
L'aquarium est implanté dans le sol. La partie supérieure, visible, est une « calotte sphérique ».
La partie inférieure, enfouie, abrite les machines.

1. a. On a représenté en gris sur la figure la section entre le plan horizontal du sol et l'aquarium. Quelle est la nature de cette section ?

b. Le centre de la sphère O, est situé à 3 m du sol (OH = 3 m). R est un point de la sphère placé sur le sol. Calculer le rayon HR de cette section.

2. a. T est le point de la sphère tel que T, O et H soient alignés (voir figure).
Calculer la hauteur HT.

b. Le volume d'une calotte sphérique de rayon r est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$$

où h est la hauteur de la calotte (ici h = HT).
Calculer le volume $\mathcal{V}$ en litres de cette calotte.
Arrondir à l'unité.

c. Des pompes délivrent de l'eau de mer à débit constant pour remplir l'aquarium vide. En 2 h, elles injectent 14 000 L.
Au bout de combien d'heures les pompes auront-elles rempli l'aquarium ?
On prendra 469 000 L comme volume de l'aquarium.

D'après *DNB*

1. a. La section d'une boule par un plan est un disque.
b. Le triangle OHR est rectangle en H.
L'égalité de Pythagore permet d'écrire
$OR^2 = HO^2 + HR^2$ d'où $5^2 = 3^2 + HR^2$
$HR^2 = 25 - 9 = 16$ d'où HR = 4 m.
2. a. HT = HO + OT = 3 m + 5 m = 8 m
b. $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times (15 - 8) = \frac{448\,\pi}{3}$
d'où $\mathcal{V} \approx 469{,}145\ m^3$
$\mathcal{V} \approx 469\,145\ dm^3$ ou $\mathcal{V} \approx 469\,145$ L.
Le volume de la calotte est 469 145 litres.
c. $(469\,000 : 14\,000) \times 2 = 67$
Il faut 67 heures pour remplir l'aquarium.

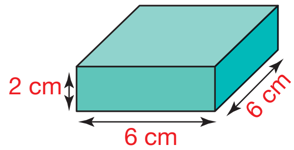
CALCUL MENTAL • .... • .... • .... • .... • ....
• .... • .... • .... • .... • ....

Note
..... / .....

FICHE
95 Perfectionnement

★★★

1 Eva fait des bracelets en pâte à modeler constitués de 8 perles rondes et de 4 perles longues.
La pâte à modeler se vend par blocs de la forme d'un pavé droit (voir ci-contre).
Elle durcit à la cuisson.



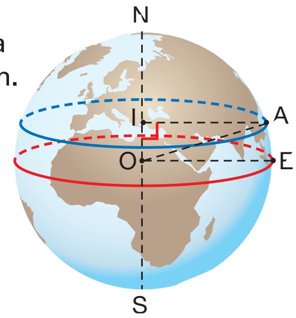
Les perles rondes sont des boules de diamètre 8 mm. Les perles longues sont des cylindres de hauteur 16 mm et de diamètre 8 mm.
Eva achète un bloc de pâte bleue pour les perles rondes et un bloc de pâte blanche pour les perles longues.
Combien de bracelets peut-elle espérer réaliser ?

• Volume $\mathcal{V}$ d'un bloc de pâte à modeler :
$\mathcal{V} = 2 \times 6 \times 6 = 72\ \text{cm}^3$ ou $\mathcal{V} = 72\,000\ \text{mm}^3$.
• Volume $\mathcal{V}_1$ d'une perle ronde :
Rayon $R = 8\ \text{mm} : 2 = 4\ \text{mm}$
$\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = \frac{256\pi}{3}$ d'où $\mathcal{V}_1 \approx 268\ \text{mm}^3$
$72\,000 : 268 \approx 268$ et $268 : 8 = 33{,}5$
Eva a des perles pour 33 bracelets.
• Volume $\mathcal{V}_2$ d'une perle longue :
$\mathcal{V}_2 = \pi \times 4^2 \times 16 = 256\pi$ d'où $\mathcal{V}_2 \approx 804\ \text{mm}^3$
$72\,000 : 804 \approx 89$ et $89 : 4 = 22{,}25$
Eva a des perles pour 22 bracelets.
• $22 < 33$ donc Eva peut faire 22 bracelets.

2 Une cloche à fromage en forme de demi-sphère de rayon 12 cm et une boîte cylindrique de même rayon ont le même volume.
Déterminer la hauteur de la boîte.

• Volume $\mathcal{V}_1$ de la cloche à fromage :
$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 12^3$ d'où $\mathcal{V}_1 = 1\,152\pi\ \text{cm}^3$.
• On nomme h la hauteur de la boîte.
Volume $\mathcal{V}_2$ de la boîte :
$\mathcal{V}_2 = \pi \times 12^2 \times h = 144\pi \times h$
• $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ donc $144\pi \times h = 1\,152\pi$
d'où $h = \frac{1\,152\pi}{144\pi} = 8$
La hauteur de la boîte est 8 cm.

3 La Terre est assimilée à une boule de rayon 6370 km.
On nomme O le centre de la Terre, N le pôle Nord et S le pôle Sud.
Le cercle rouge représente l'équateur et le cercle bleu le 20ᵉ parallèle Nord : $\widehat{EOA} = \widehat{OAI} = 20°$.
Calculer la longueur, en km, de ce parallèle.
Donner l'arrondi à la dizaine.



• On cherche le rayon IA de ce parallèle.
Dans le triangle rectangle IAO,
$\cos \widehat{IAO} = \frac{AI}{AO}$ d'où $\cos 20° = \frac{AI}{6370}$
d'où $AI = 6\,370 \times \cos 20°$ et $AI \approx 5\,986$ km.
• $L = 2 \times AI \times \pi$ d'où $L \approx 37\,610$ km.
La longueur du 20ᵉ parallèle Nord est environ 37 610 km.

4 Pour être utilisé en compétition du lancer du poids, un poids doit vérifier les conditions indiquées dans le tableau ci-dessous.

Poids	Homme	Femme
Diamètre	de 110 à 130 mm	de 95 à 110 mm
Masse	de 7,26 à 7,285 kg	de 4 à 4,025 kg

Un poids de diamètre 12 cm est composé d'un métal ayant une masse volumique de 8 g/cm³.
Pourra-t-il être utilisé en compétition ? Justifier.

• $11\ \text{cm} < 12\ \text{cm} < 13\ \text{cm}$ donc il s'agit d'un poids d'homme.
• Rayon R du poids : $R = 12\ \text{cm} : 2 = 6$ cm.
• Volume V du poids : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3$
d'où $V = 288\pi\ \text{cm}^3$ et $V \approx 905\ \text{cm}^3$
• Masse M : 1 cm³ pèse 8 g donc 905 cm³ pèsent 905×8 g d'où $M \approx 7\,240$ g.
Ainsi $M \approx 7{,}24$ kg. Or $7{,}24\ \text{kg} < 7{,}26\ \text{kg}$.
Il ne pourra pas être utilisé en compétition.

Chapitre 15

Angles inscrits. Polygones réguliers

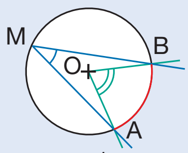
CALCUL MENTAL	• .... • .... • .... • .... •	Note
	• .... • .... • .... • .... •	..... / .....

FICHE

96 Angles inscrits, angles au centre

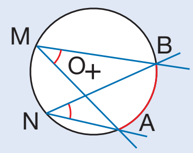
• A, M, B sont trois points distincts d'un cercle de centre O.
$\widehat{AMB}$ est un **angle inscrit** et $\widehat{AOB}$ est l'**angle au centre** qui intercepte le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

• Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à **la moitié** de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

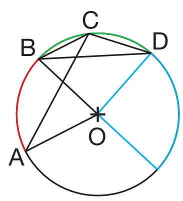
• Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.



$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

★

1 A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O.

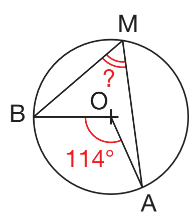


a. Citer un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (rouge). $\widehat{ACB}$

b. Citer l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{BD}$ (vert). ...$\widehat{BOD}$...............

c. Repasser en couleur l'arc intercepté par l'angle $\widehat{OBD}$.

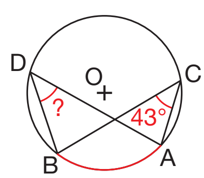
2 A, B et M appartiennent au cercle de centre O.



a. Quel angle au centre intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$? ...$\widehat{AOB}$.......

b. Compléter : $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{114°}{2} = 57°$

3 A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O.



a. Citer deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ (rouge).

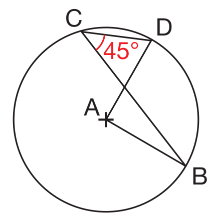
Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.......................................

b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$.

$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 43°$.......................................

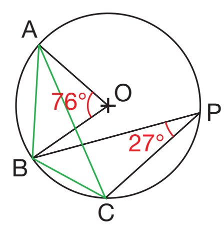
★★

4 B, C et D appartiennent au cercle de centre A.
Lila : « L'angle $\widehat{BAD}$ mesure 89°. Je l'ai mesuré. »
Houria : « Tu te trompes ! »
Qu'en pensez-vous ?



L'angle inscrit $\widehat{BCD}$ et l'angle au centre $\widehat{BAD}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$.
Donc $\widehat{BAD} = 2 \times \widehat{BCD} = 2 \times 45° = 90°$.
Houria a raison.

5 A, B, C et P appartiennent au cercle de centre O.
Avec les données de la figure, calculer les mesures des angles du triangle ABC.



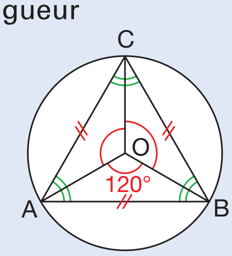
• L'angle inscrit $\widehat{ACB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même $\overset{\frown}{AB}$.
Donc $\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{76°}{2} = 38°$.
• Les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BPC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$
donc ils ont la même mesure.
$\widehat{BAC} = \widehat{BPC} = 27°$
• $\widehat{ABC} = 180° - (38° + 27°) = 115°$.

CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

97 Polygones réguliers

- Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.
- Il existe un cercle qui passe par tous les sommets d'un polygone régulier.
Le centre de ce cercle est **le centre du polygone régulier**.
Le polygone régulier est **inscrit** dans ce cercle.
- Si [AB] est un côté d'un polygone régulier de centre O ayant n côtés, alors $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{n}$.



★

1 **a.** Expliquer pourquoi un triangle équilatéral est un polygone régulier.

Ses trois côtés ont la même longueur

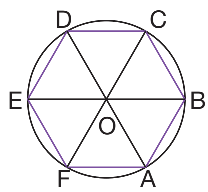
et ses trois angles ont la même mesure (60°).

b. ABC est un triangle équilatéral de centre O. Pourquoi l'angle $\widehat{AOB}$ mesure-t-il 120° ?

Un triangle équilatéral a trois côtés

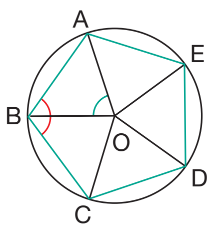
donc $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{3} = 120°$

2 ABCDEF est un hexagone régulier de centre O. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$?



$\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{6} = 60°$

3 ABCDE est un pentagone régulier de centre O.



a. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$?

$\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{5} = 72°$

b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ du pentagone.

• Le triangle AOB est isocèle en O donc

ses angles à la base ont la même mesure.

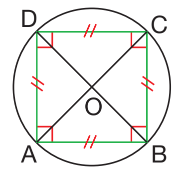
$\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \dfrac{180° - 72°}{2} = \dfrac{108°}{2} = 54°$

• De même $\widehat{OBC} = 54°$

• Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = 2 \times 54° = 108°$

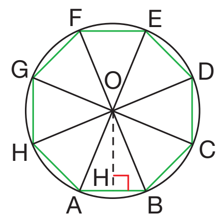
★★

4 ABCD est un carré inscrit dans un cercle de rayon 3 cm. Calculer la longueur AB (en cm). En donner l'arrondi au dixième.



Les diagonales d'un carré ont le même milieu, la même longueur et sont perpendiculaires.
Le triangle AOB est rectangle et isocèle en O.
L'égalité de Pythagore permet d'écrire
$AB^2 = OA^2 + OB^2$ d'où $AB^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$.
$AB = \sqrt{18}$ cm soit $AB \approx 4{,}2$ cm.

5 ABCDEFGH est un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon 5 cm. On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.



a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$.

b. Calculer la longueur AB (en cm). En donner l'arrondi au dixième.

a. Le triangle AOB est isocèle en O donc (OH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.
$\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{8} = 45°$ d'où $\widehat{AOH} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = 22{,}5°$
b. Dans le triangle rectangle AOH
$\sin \widehat{AOH} = \dfrac{AH}{AO}$ c'est-à-dire $\sin 22{,}5° = \dfrac{AH}{5}$
$AH = 5 \times \sin 22{,}5°$.
Or H est le milieu de [AB]
d'où $AB = 10 \times \sin 22{,}5°$ cm.
$AB \approx 3{,}8$ cm.

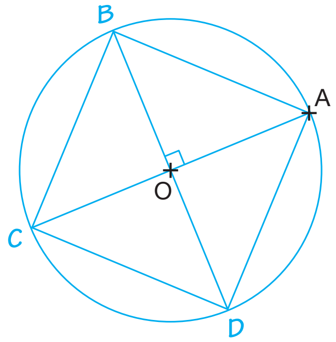
CALCUL MENTAL	•	•	•	•	•	Note
	•	•	•	•	•	..... / .....

FICHE

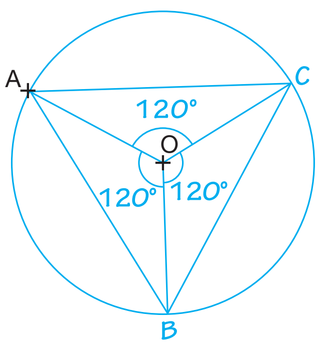
98 Constructions de polygones réguliers

★

1 S On donne les deux points O et A.
Construire un carré ABCD de centre O.
Commencer par tracer le cercle de centre O passant par A.

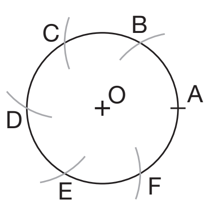


2 S On donne les deux points O et A.
Construire un triangle équilatéral ABC de centre O.
Commencer par calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ puis tracer le cercle de centre O passant par A.



$\widehat{AOB} = \frac{360°}{3} = 120°$

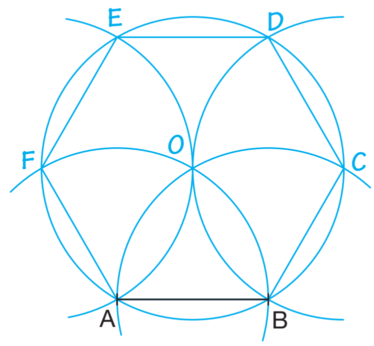
3 On a tracé un cercle de centre O et de rayon 1 cm.
On a placé un point A sur ce cercle puis on a reporté six fois la longueur OA sur le cercle à partir de A.
Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?



ABCDEF est un hexagone régulier.

★★

4 Construire un hexagone régulier ABCDEF dont un côté est le segment [AB] ci-dessous.
Commencer par construire son centre O.



5 **a.** Sur la figure ci-dessous, placer un point B tel que le triangle OAB soit isocèle en O et $\widehat{AOB} = 45°$.

b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABO}$.

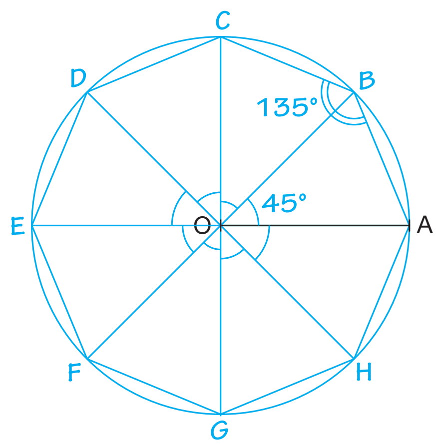
Le triangle AOB est isocèle en O.

$\widehat{ABO} = \widehat{OAB} = \frac{180° - 45°}{2} = \frac{135°}{2} = 67,5°$

c. Les points A et B sont deux sommets d'un octogone régulier ABCDEFGH de centre O.
Donner la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

$\widehat{ABC} = 2 \times \widehat{ABO} = 2 \times 67,5° = 135°$

d. Terminer la construction de l'octogone.



FICHE 99

OBJECTIF BREVET

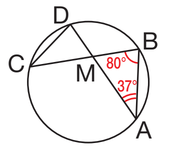
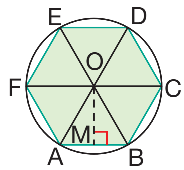
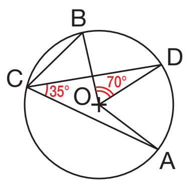
Sélection de sujets de Brevet

★★

Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, entourer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

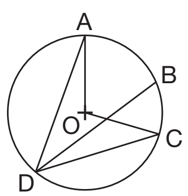
Note ..... / 5

QCM

A	Les cordes [AD] et [BC] se coupent en M. On est certain que…		$\widehat{CDA} = 40°$	$\widehat{BCD} = 37°$	$\widehat{CDA} = 80°$
B	ABCDEF est un hexagone régulier de centre O tel que : OA = 3 cm. Alors…		$\widehat{AOB} = 60°$	AOF est un triangle équilatéral	Le périmètre de l'hexagone est 18 cm
C	Avec les données de la figure, la longueur OM (en cm) est égale à…		$3 \times \cos 30°$	$3 \times \sin 60°$	1,5 cm
D	Pour les points de ce cercle, on peut affirmer que…		$\widehat{ACD} = 2 \times \widehat{AOD}$	$\widehat{BCD} = \widehat{BOD} : 2$	$\widehat{AOD} = 2 \times \widehat{ACD}$
E	Avec les données de la figure,…		$\widehat{AOD} = 70°$	$\widehat{BCD} = 35°$	[CD) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$

1 ▶ *Utiliser angle inscrit et angle au centre*

A, B, C et D sont quatre points d'un cercle de centre O tels que : $\widehat{AOB} = 64°$ et $\widehat{BDC} = 20°$.



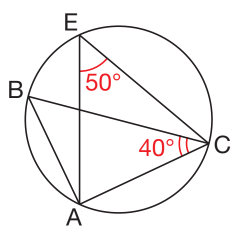
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Justifier.

D'après *DNB*

$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$
On peut calculer la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.
En effet $\widehat{BOC}$ est un angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BDC}$.
Donc $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BDC} = 2 \times 20° = 40°$
Alors $\widehat{AOC} = 64° + 40° = 104°$
L'angle $\widehat{AOC}$ mesure 104°.

2 ▶ *Utiliser des angles inscrits*

Les points A, B, C et E appartiennent au cercle ci-dessous.



Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

D'après *DNB*

Les angles inscrits $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$ donc ils ont la même mesure.
$\widehat{ABC} = \widehat{AEC} = 50°$.
Dans le triangle ABC,
$\widehat{BAC} = 180° - (50° + 40°) = 90°$
Donc le triangle ABC est rectangle en A.

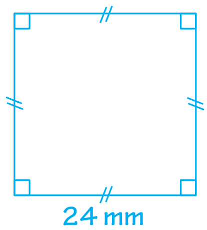
3 ▶ Construire un carré

a. Construire un carré de 96 mm de périmètre.

b. Calculer l'aire de ce carré.

D'après *DNB*

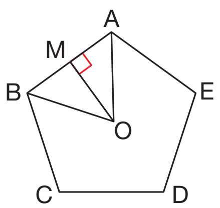
a. Côté : 96 mm : 4 = 24 mm

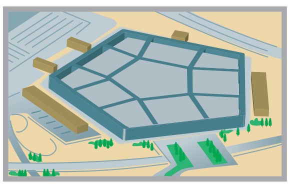


b. Aire : $24^2 = 576$ L'aire est 576 mm².

4 ▶ Étudier un pentagone régulier

Le Pentagone est un bâtiment hébergeant le ministère de la défense des Etats-Unis.
Il a la forme d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon OA = 238 m.





1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

2. La hauteur issue de O dans le triangle AOB coupe le côté [AB] au point M.

a. Justifier que (OM) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de [AB].

b. Prouver que [AM] mesure environ 140 m.

c. En déduire une valeur approchée du périmètre P du Pentagone.

D'après *DNB*

1. $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{5} = 72°$.

2. a. Le triangle AOB est isocèle en O donc la hauteur (OM) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de [AB].

b. Dans le triangle AOM, rectangle en M :

$\widehat{AOM} = \dfrac{72°}{2} = 36°$.

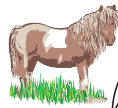
$\sin \widehat{AOM} = \dfrac{AM}{AO}$ soit $\sin 36° = \dfrac{AM}{238}$

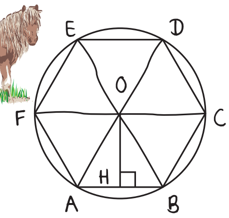
$AM = 238 \times \sin 36°$ d'où $AM \approx 140$ m.

c. $AB = 2 \times AM$ d'où $AB \approx 280$ m.
Périmètre : $P = 5 \times AB$ d'où $P \approx 1\,400$ m.

5 ▶ Étudier un hexagone régulier

Rémi construit un enclos pour son poney, en forme d'hexagone régulier, de 192 m de périmètre.
Il fait un schéma à main levée.
L'hexagone ABCDEF est inscrit dans un cercle de centre O.
Le segment [OH] est une hauteur du triangle équilatéral OBA.





1. a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{COE}$.

b. Montrer que l'angle $\widehat{CAE}$ mesure 60°.

2. a. Calculer le rayon du cercle.

b. Calculer la longueur OH, en m.
En donner l'arrondi au centième.

c. Utiliser ce résultat pour calculer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle OBA, en m², et arrondie au dixième.

d. En déduire l'aire, en m², de l'enclos, arrondie à l'unité.

D'après *DNB*

1. a. ABCDEF est un hexagone régulier, donc les triangles COD et DOE sont équilatéraux.
Donc $\widehat{COD} = \widehat{DOE} = 60°$.
$\widehat{COE} = 2 \times 60° = 120°$.

b. L'angle inscrit $\widehat{CAE}$ et l'angle au centre $\widehat{COE}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{CE}$, donc :
$\widehat{CAE} = \dfrac{1}{2}\widehat{COE} = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

2. a. AOB est un triangle équilatéral donc OA = AB = 192 m : 6 = 32 m.
Le rayon du cercle est 32 m.

b. Dans le triangle équilatéral OAB, (OH) est aussi la médiatrice de [AB] donc H est le milieu de [AB].
AH = 32 m : 2 = 16 m.
Dans le triangle AOH, rectangle en H, l'égalité de Pythagore permet d'écrire
$OA^2 = HO^2 + HA^2$ d'où $32^2 = HO^2 + 16^2$
$HO^2 = 32^2 - 16^2 = 768$.
$OH = \sqrt{768}$ m soit $OH \approx 27{,}71$ m.

c. $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times OH}{2}$ d'où $\mathscr{A} \approx \dfrac{32 \times 27{,}71}{2}$
$\mathscr{A} \approx 443{,}4$ m².
L'aire du triangle OAB est environ 443,4 m².

d. Aire $\mathscr{A}'$ de l'hexagone
$\mathscr{A}' = \mathscr{A} \times 6$ d'où $\mathscr{A}' \approx 443{,}4\ \text{m}^2 \times 6$
$\mathscr{A}' \approx 2\,660$ m²
L'aire de l'enclos est environ 2 660 m².

FICHE
100 Perfectionnement

★★★

1 [AB] est un segment de longueur 5 cm.

a. Tracer le cercle de diamètre [AB] et de centre O.

b. Placer un point M de ce cercle tel que : $\widehat{BOM} = 36°$.

c. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MAB}$. Justifier.

d. Quelle est la nature du triangle BAM ? Justifier.

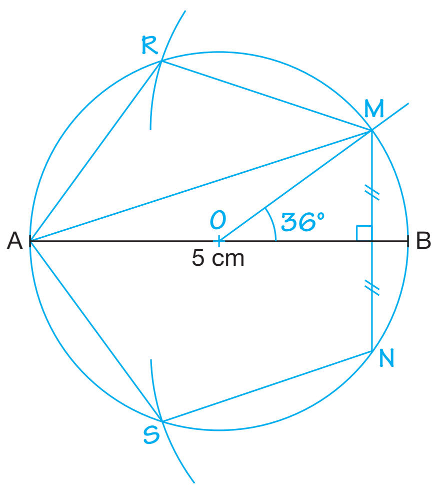
e. Calculer la longueur AM, en cm, et en donner un arrondi au dixième.

f. Construire le symétrique N de M par rapport à la droite (AB).

g. Placer les points R et S de façon que NMRAS soit un pentagone régulier.

D'après *DNB*

a. b. f. g.



c. L'angle inscrit $\widehat{MAB}$ et l'angle au centre $\widehat{MOB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{MB}$,
donc $\widehat{MAB} = \widehat{MOB} : 2 = 36° : 2 = 18°$.

d. Le point M appartient au cercle de diamètre [AB] donc le triangle BAM est rectangle en M.

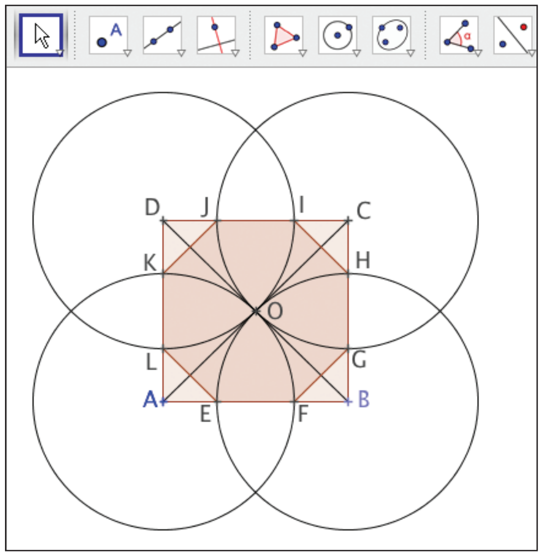
e. Dans le triangle rectangle BAM,
$\cos \widehat{BAM} = \dfrac{AM}{AB}$ d'où $\cos 18° = \dfrac{AM}{5}$
Alors $AM = 5 \times \cos 18°$ d'où $AM \approx 4{,}8$ cm.

2 Avec un logiciel de géométrie,

a. tracer un carré ABCD de côté 6 cm (utiliser Polygone régulier et compléter la boîte de dialogue par 4),

b. noter O le centre de ce carré,

c. tracer quatre cercles ayant pour centres les sommets du carré et passant par O.

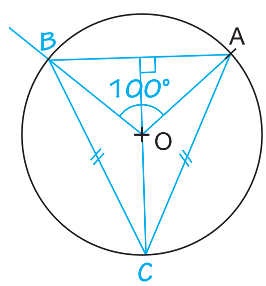


d. Ces quatre cercles coupent les côtés du carré en huit points qui sont les sommets d'un octogone EFGHIJKL.
Tester si cet octogone semble régulier ou non.
Écrire ce qui a été observé.

d. • On affiche les longueurs des huit côtés de l'octogone.
On lit 2,49 à chaque fois.
• On marque les huit angles de l'octogone.
On lit 135° à chaque fois.
Il semble donc que l'octogone soit régulier.

3 A est un point d'un cercle de centre O.
Placer deux points B et C du cercle tels que :
- le triangle ACB est isocèle en C ;
- $\widehat{ACB} = 50°$.

Laisser apparents les traits de construction.



Je me prépare au BREVET

L'épreuve écrite de mathématiques

› **Durée : 2 heures.**

› Le sujet est constitué de **six à dix exercices indépendants** que l'on peut traiter dans l'ordre qui convient.
Un des exercices au moins a pour objet **une tâche non guidée, exigeant une prise d'initiative.**

› L'épreuve est notée sur **40 points**.
- Chaque exercice est noté entre 3 et 8 points, le total étant de 36 points.
- 4 points sont réservés à la maîtrise de la langue.

L'emploi de la calculatrice est autorisé.

Nos conseils pour l'épreuve

› **Préparer son matériel à l'avance**

Prévoir règle, équerre, compas, rapporteur.
Vérifier que la calculatrice est en mode degré.

› **Gérer son temps pendant l'épreuve**

• Prendre quelques minutes pour parcourir le sujet, essayer de reconnaître dans les exercices le(s) thème(s) dont il s'agit.
Commencer par ceux que l'on pense réussir.

• Faire attention au nombre de points de chaque exercice pour estimer le temps approximatif à consacrer à chacun d'eux.
Par exemple, ne pas passer plus de 10 minutes sur un exercice à 3 points, pour pouvoir passer 20 minutes sur un autre à 6 points (durées données à titre indicatif).

› **Rédiger sa copie**

• Penser à mettre en évidence les numéros des exercices.

• Bien séparer les exercices.

• Présenter les exercices dans l'ordre, quitte à laisser des espaces vides.

• Souligner ou encadrer le résultat à la fin de chaque question.

• Ne pas oublier les unités s'il y en a.

Nos conseils selon les types d'exercices

› **QCM.** Le plus souvent aucune justification n'est demandée et une mauvaise réponse n'est pas pénalisée. Il est donc conseillé de répondre au QCM s'il y en a un.
Il peut être utile de faire quelques vérifications ou tests au brouillon, d'utiliser sa calculatrice.

› **Calculs.** Penser à écrire les étapes des calculs. Faire attention aux modalités de réponse indiquées par l'énoncé.

› **Constructions.** Veiller à y apporter le plus grand soin. Laisser apparents les traits de construction.

› **Justifications.** Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée. On s'appuie sur les données de l'énoncé et sur les définitions, propriétés, règles étudiées.
Ne pas oublier de conclure.

› **Exercices avec prise d'initiative.** L'énoncé ne guide pas la recherche par des questions intermédiaires. Il faut écrire sur la copie les idées qu'on a eues, même si l'on n'est pas parvenu à conclure. Les essais, les démarches engagées, même non abouties, seront pris en compte.

› L'évaluation prendra en compte la clarté et la précision des raisonnements.
Toutefois, les solutions exactes, même justifiées de manière incomplète, comme la mise en œuvre d'idées pertinentes, même maladroitement formulées, seront valorisées.

Sujet 1

Exercice 1 *(3 points)*

Un cybercafé est ouvert depuis une semaine. Dans ce cybercafé, on peut choisir entre deux moteurs de recherche : Youpi et Hourra.
Le tableau ci-dessous donne les moteurs de recherche utilisés par les 992 premiers utilisateurs lors de la semaine d'ouverture.

Nombre d'utilisateurs	Moteur Youpi	Moteur Hourra
992	789	203

La probabilité pour qu'un utilisateur pris au hasard dans ce cybercafé choisisse le moteur Youpi est-elle proche de 0,4 ; de 0,6 ou de 0,8 ? Justifier.

Exercice 2 *(6 points)*

Document 1

Le salaire moyen brut[1] des Français s'établissait en 2010 à 2 764 € par mois.

Etude publiée par l'INSEE en juin 2012

(1) Le salaire moyen brut est le salaire non soumis aux charges.

Document 2

La population française est estimée en 2010 à 65 millions d'habitants.

Document 3

« Encore un peu moins d'argent dans le porte-monnaie des Français en 2010. Le salaire médian brut est égal à 1 610 € par mois.
Le niveau de vie des Français a baissé par rapport à 2009. D'ailleurs, le taux de pauvreté enregistré en cette année 2010 est le plus haut jamais observé depuis 1997. Il concerne 8,6 millions de Français qui vivent en dessous du seuil de pauvreté évalué à 964 € par mois ».

Extrait d'un reportage diffusé sur BFMTV en septembre 2012

a. En France, le salaire que touche effectivement un employé est égal au salaire brut, diminué de 22 % et est appelé le salaire net.
Montrer que le salaire net moyen que percevait un Français en 2010 était de 2 155,92 €.

b. Expliquer à quoi correspond le salaire médian brut.

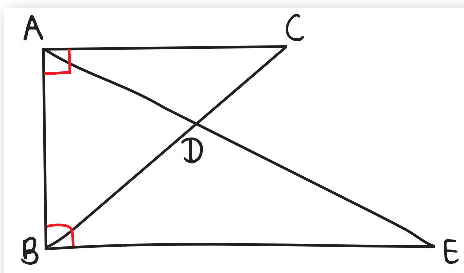
c. Comparer le salaire médian brut et le salaire moyen brut des Français.
Comment peut-on expliquer cette différence ?

d. Calculer le pourcentage de Français qui vivaient en 2010 sous le seuil de pauvreté.
Arrondir le résultat à l'unité.

Exercice 3 *(5 points)*

Voici une figure codée réalisée à main levée.
On sait que :

- la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) ;
- la droite (EB) est perpendiculaire à la droite (AB) ;
- les droites (AE) et (BC) se coupent en D ;
- AC = 2,4 cm ; AB = 3,2 cm ; BD = 2,5 cm ; DC = 1,5 cm.



a. Réaliser la figure en vraie grandeur sur la copie.

b. Déterminer l'aire du triangle ABE.

Exercice 4 *(7 points)*

Un pâtissier a préparé 840 financiers et 1 176 macarons. Il souhaite faire des lots tous identiques, en mélangeant financiers et macarons. Il veut utiliser tous les financiers et tous les macarons.

1. a. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi les nombres 840 et 1 176 ne sont pas premiers entre eux.

b. Le pâtissier peut-il faire 21 lots ?
Si oui, calculer le nombre de financiers et le nombre de macarons dans chaque lot.

c. Quel est le nombre maximum de lots qu'il peut faire ?
Quelle sera alors la composition de chacun des lots ?

2. Cette année, chaque lot de 5 financiers et 7 macarons est vendu 22,40 €.
L'année dernière, les lots, composés de 8 financiers et de 14 macarons, étaient vendus 42 €.
Aucun prix n'a changé entre les deux années.
Calculer le prix d'un financier et celui d'un macaron.

Exercice 5 *(6 points)*

Trois figures codées sont données ci-dessous. Elles ne sont pas dessinées en vraie grandeur.
Pour chacune d'elles, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. Justifier.

Figure 1

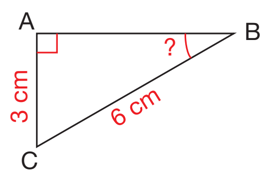
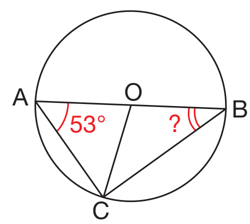
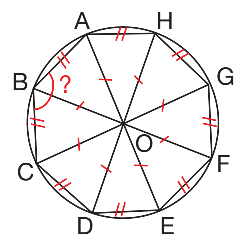


Figure 2



[AB] est un diamètre du cercle de centre O.

Figure 3



Exercice 6 *(6 points)*

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

Affirmation 1 : « Le double de $\frac{7}{4}$ est égal à $\frac{7}{2}$. »

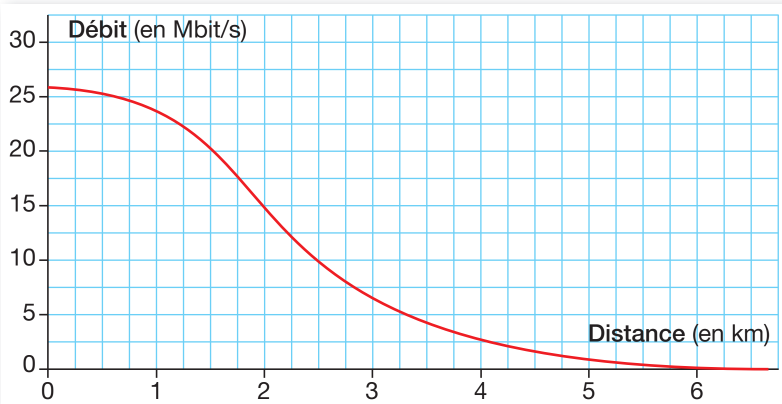
Affirmation 2 : « Le carré de $3\sqrt{5}$ est égal à 15. »

Affirmation 3 : « La vitesse moyenne d'un coureur qui parcourt 18 km en une heure est strictement supérieure à celle d'une voiture télécommandée qui parcourt 5 m par seconde. »

Affirmation 4 : « Pour tout nombre x, on a l'égalité : $(3x - 5)^2 = 9x^2 - 25$. »

Exercice 7 *(3 points)*

Le débit d'une connexion internet varie en fonction de la distance du modem au central téléphonique le plus proche.
On a représenté ci-contre la fonction qui, à la distance du modem au central téléphonique (en km), associe son débit théorique (en mégabits par seconde).



a. Marie habite à 2,5 km d'un central téléphonique. Quel débit de connexion obtient-elle ?

b. Paul obtient un débit de 20 Mbits/s. À quelle distance du central téléphonique habite-t-il ?

c. Pour pouvoir recevoir la télévision par internet, le débit doit être au moins de 15 Mbits/s.
À quelle distance maximum du central doit-on habiter pour pouvoir recevoir la télévision par internet ?

Sujet 2

Exercice 1 *(5 points)*

Pour chacune des questions suivantes, écrire sur la copie (sans justification) le numéro de la question et la lettre de la bonne réponse.

	Enoncé	Réponse A	Réponse B	Réponse C
n° 1	Une écriture simplifiée de $\frac{125}{625}$ est …	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	125,625
n° 2	Pour parcourir 600 m à la vitesse moyenne de 30 km/h, il faut …	1 min 12 s	1 min 20 s	1 min 2 s
n° 3	Si on triple l'arête d'un cube, alors le volume du cube est multiplié par …	3	9	27
n° 4	La forme factorisée de $25x^2 - 16$ est …	$(5x-4)^2$	$(5x-8)(5x+8)$	$(5x+4)(5x-4)$
n° 5	Si $x = -4$ alors $x + 4 + (x + 4)(2x - 5)$ est égal à …	-4	-1	0

Exercice 2 *(5 points)*

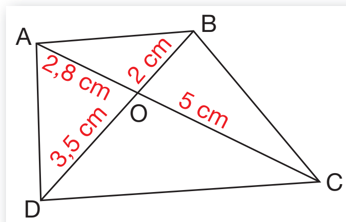
Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse en argumentant la réponse.

Affirmation 1 : $(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)$ est un nombre entier.

Affirmation 2 : 4 n'admet que deux diviseurs.

Affirmation 3 : Un cube, une pyramide à base carrée et un pavé droit totalisent 17 faces.

Affirmation 4 : Ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Exercice 3 *(4 points)*

1. Construire un triangle ABC rectangle en C tel que AB = 10 cm et AC = 8 cm.

2. Calculer la longueur BC (en justifiant précisément).

3. a. Placer le point M de l'hypoténuse [AB] tel que AM = 2 cm.
Tracer la perpendiculaire à [AC] passant par M. Elle coupe [AC] en E.
Tracer la perpendiculaire à [BC] passant par M. Elle coupe [BC] en F.

b. À l'aide des données de l'exercice, recopier sur la copie la proposition que l'on peut directement utiliser pour prouver que le quadrilatère MFCE est un rectangle.

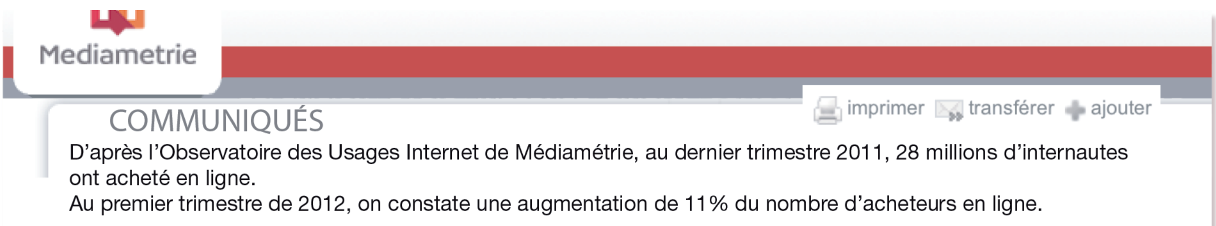
Proposition 1 : Si un quadrilatère a 4 angles droits, alors c'est un rectangle.

Proposition 2 : Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur.

Proposition 3 : Si un quadrilatère a 3 angles droits, alors c'est un rectangle.

Exercice 4 *(3 points)*

Voici un article trouvé sur internet.


Mediametrie

imprimer transférer ajouter

COMMUNIQUÉS

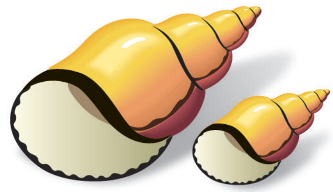
D'après l'Observatoire des Usages Internet de Médiamétrie, au dernier trimestre 2011, 28 millions d'internautes ont acheté en ligne.
Au premier trimestre de 2012, on constate une augmentation de 11 % du nombre d'acheteurs en ligne.

a. En utilisant les données de cet article, calculer le nombre de cyberacheteurs au premier trimestre 2012. Arrondir le résultat au dixième de million.

b. Si la progression sur le deuxième trimestre 2012 est, elle aussi, de 11%, quelle est la progression en pourcentage sur les deux trimestres ? Justifier la réponse.

Exercice 5 *(3 points)*

Un enfant a ramassé 20 coquillages.
Les grands mesurent 2 cm de long, les petits mesurent 1 cm.
Tous les coquillages mis bout à bout font 32 cm au total.
Combien a-t-il de grands coquillages ? de petits ?



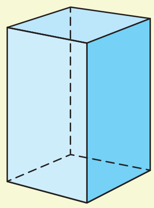
Exercice 6 *(3 points)*

Dans cet exercice, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche, elle sera prise en compte dans l'évaluation.
Le fleuve Amazone possède le débit moyen le plus important au monde. Il est d'environ 190 000 m^3/s.
En France, un foyer de trois personnes consomme en moyenne 10 000 L d'eau par mois.
Donner un ordre de grandeur du nombre de ces foyers que pourrait alimenter ce fleuve en un an.

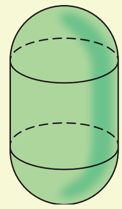
Exercice 7 *(5 points)*

Sur un parking, une commune veut regrouper six conteneurs à déchets du même modèle A ou B.
Les deux modèles sont fabriqués dans le même matériau qui a partout la même épaisseur.

Le conteneur A
Le conteneur A est un pavé droit à base carrée de côté 1 m et de hauteur 2 m.



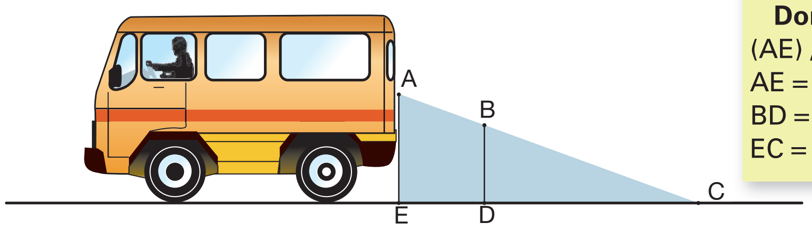
Le conteneur B
Le conteneur B est constitué de deux demi-sphères de rayon 0,58 m et d'un cylindre de même rayon et de hauteur 1,15 m.



1. a. Vérifier que les deux conteneurs ont pratiquement le même volume.
b. Quels peuvent être les avantages du conteneur A ?
2. On souhaite savoir quel est le conteneur le plus économique à fabriquer.
a. Calculer l'aire totale des six faces du conteneur A.
b. Vérifier que, pour le conteneur B, l'aire totale, arrondie au dixième de m^2, est 8,4 m^2.
c. Quel est le conteneur le plus économique à fabriquer ? Justifier la réponse.

Exercice 8 *(4 points)*

En se retournant lors d'une marche arrière, le conducteur voit le sol à 6 m derrière sa camionnette.
Sur le schéma, la zone grisée correspond à ce que le conducteur ne voit pas lorsqu'il regarde en arrière.



Données
(AE) //(BD)
AE = 1,50 m
BD = 1,10 m
EC = 6 m

a. Calculer DC.
b. En déduire que ED = 1,60 m.
c. Une fillette mesure 1,10 m. Elle passe à 1,40 m derrière la camionnette.
Le conducteur peut-il la voir ? Expliquer.

Exercice 9 *(4 points)*

On cherche à résoudre l'équation $(5x - 3)^2 - 9 = 0$.
a. Le nombre $\frac{3}{5}$ est-il solution de cette équation ? et le nombre 0 ?
b. Prouver que, pour tout nombre x, $(5x - 3)^2 - 9 = 5x(5x - 6)$.
c. Déterminer les solutions de l'équation $(5x - 3)^2 - 9 = 0$.

Sujet 3

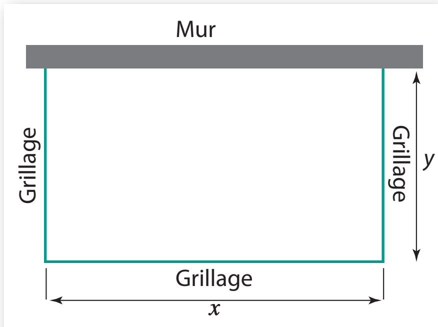
Exercice 1 *(4 points)*

Pour chacune des questions suivantes, écrire sur la copie (sans justification) le numéro de la question et recopier la réponse exacte.

	Enoncé	Réponse A	Réponse B	Réponse C
n° 1	Pour $x = 3\sqrt{2}$, l'expression $A = x^2 - 2x + 1$ vaut...	$13\sqrt{2}$	$7 - 6\sqrt{2}$	$19 - 6\sqrt{2}$
n° 2	L'écriture scientifique de 0,052 4 est...	524×10^{-4}	$5{,}24 \times 10^{-2}$	$5{,}24 \times 10^{2}$
n° 3	f est la fonction définie par : $f(x) = x^2 - x$. Alors...	l'image de – 1 est –2	l'image de –1 est 0	0 a pour antécédents 0 et 1
n° 4	Les solutions de l'inéquation $-2x + 3 \geqslant 9$ sont les nombres x tels que :	$x \geqslant -3$	$x \leqslant 3$	$x \leqslant -3$

Exercice 2 *(8 points)*

Un éleveur a acheté 40 m de grillage ; il veut adosser un enclos rectangulaire à sa grange, contre un mur de 28 m de long. Il souhaite offrir ainsi le maximum de place à ses brebis .



1. a. Pour $x = 4$ (en m), calculer la longueur y, puis l'aire A de l'enclos (en m²).

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

x (en m)	4	10	20	28
y (en m)				
A (en m²)				

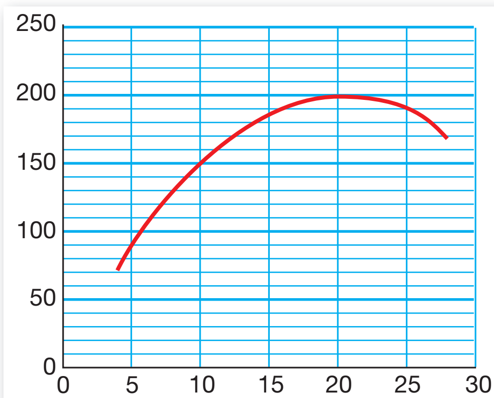
2. Déterminer y en fonction de x.
En déduire que $A = 20x - 0{,}5x^2$.

3. Voici la plage de cellules réalisées dans un tableur-grapheur qui permettra de calculer la valeur de A.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Valeur de x	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
2	Valeur de A													

Quelle formule doit-il saisir dans la cellule B2 et qui pourra être étendue sur toute la ligne 2 ?

4. Le graphique ci-contre représente l'aire A en fonction de la longueur x comprise entre 4 et 28.
À l'aide de ce graphique répondre aux questions suivantes en donnant des valeurs approchées.



a. Quelle est l'aire de cet enclos pour $x = 14$?

b. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de l'enclos est égale à 192 m² ?

c. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de l'enclos est maximale ? En déduire les dimensions de l'enclos pour que les brebis aient le maximum de place.

Exercice 3 *(3 points)*

Un élève a eu les notes suivantes : 3 ; 7 ; 8 ; 9 ; 12 ; 13 ; 13 ; 16 ; 18.
Déterminer :

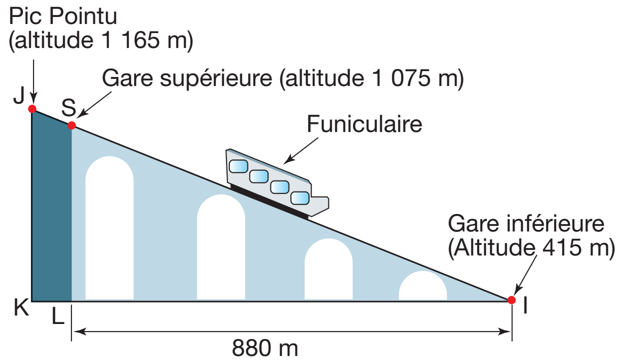
a. la médiane de ses notes ;

b. le premier quartile Q_1 de ses notes.

Exercice 4 *(7 points)*

M. Cotharbet décide de monter au Pic Pointu en prenant le funiculaire[1] entre la gare inférieure et la gare supérieure, la suite du trajet s'effectuant à pied.
Ci-contre, les points I, L et K sont alignés ainsi que les points I, S et J.

(1) Un funiculaire est une remontée mécanique équipée de véhicules circulant sur des rails en pente.



1. À l'aide des altitudes fournies, déterminer les longueurs SL et JK.

2. a. Montrer que la longueur du trajet SI entre les deux gares est 1 100 m.

b. Déterminer une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{SIL}$. On arrondira à l'unité.

3. Le funiculaire se déplace à la vitesse moyenne constante de 10 km·h^{-1}, aussi bien à la montée qu'à la descente. Calculer la durée du trajet aller entre les deux gares. On donnera le résultat en min et s.

4. Entre la gare supérieure et le sommet, M. Cotharbet effectue le trajet en marchant.
Quelle distance aura-t-il parcourue à pied ?

Exercice 5 *(7 points)*

Une pyramide régulière de sommet S a pour base le carré ABCD.
Son volume V est égal à 900 cm^3.
Sa hauteur [SH] mesure 12 cm.

1. a. Vérifier que l'aire de ABCD est 225 cm^2.

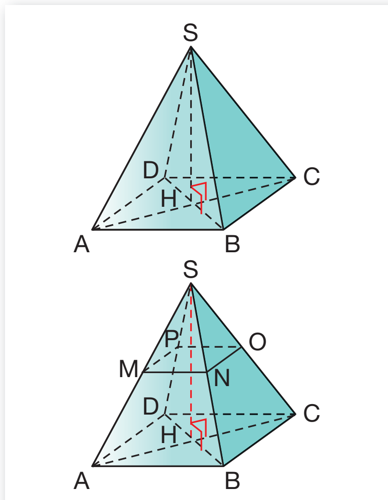
b. En déduire la valeur de AB.

c. Montrer que le périmètre du triangle ABC est égal à $30 + 15\sqrt{2}$ cm.

2. La pyramide SMNOP est une réduction de la pyramide SABCD.
L'aire du carré MNOP est égale à 9 cm^2.

a. Calculer le volume de la pyramide SMNOP.

b. *Pour cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Elise pense que pour obtenir le périmètre du triangle MNO, il suffit de diviser le périmètre du triangle ABC par 5.
Êtes-vous d'accord avec elle ?



Exercice 6 *(7 points)*

L'hôtel « La ora na » accueille 125 touristes :

- 55 néo-calédoniens dont 12 parlent également anglais ;
- 45 américains parlant uniquement l'anglais ;
- le reste étant des polynésiens dont 8 parlent également anglais.

Les néo-calédoniens et les polynésiens parlent tous le français.

1. Si je choisis un touriste pris au hasard dans l'hôtel, donner la probabilité des évènements suivants :

a. Évènement A : « Le touriste est un américain ».

b. Évènement B : « Le touriste est un polynésien ne parlant pas anglais ».

c. Évènement C : « Le touriste parle anglais ».

2. Si j'aborde un touriste dans cet hôtel, ai-je plus de chances de me faire comprendre en parlant en anglais ou en français ? Justifier la réponse.

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Périmètre, aire et volume

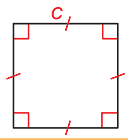
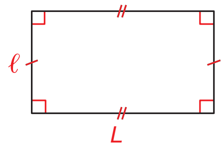
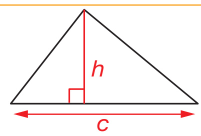
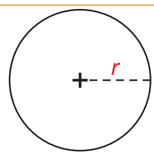
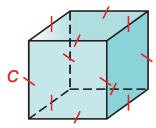
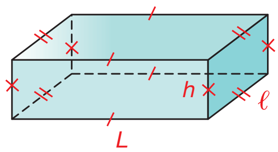
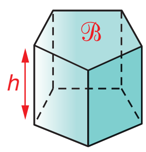
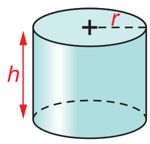
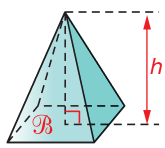
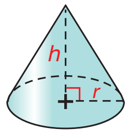
	Figure	Périmètre	Aire
Carré (côté c)		$4 \times c$ ou $4c$	$c \times c$ ou c^2
Rectangle (longueur L et largeur ℓ)		$2L + 2\ell$ ou $2(L + \ell)$	$L \times \ell$
Triangle (côté c, hauteur associée h)		Somme des longueurs des côtés	$\dfrac{c \times h}{2}$
Cercle et disque (rayon r)		$2\pi r$	πr^2

	Figure	Aire latérale	Volume
Cube (arête c)		$4 \times c^2$ ou $4c^2$	$c \times c \times c$ ou c^3
Parallélépipède rectangle (base de longueur L, largeur ℓ et hauteur h)		$2(L + \ell) \times h$	$L \times \ell \times h$
Prisme droit (aire de la base $\mathscr{B}$, hauteur h)		Périmètre d'une base $\times$ hauteur	$\mathscr{B} \times h$
Cylindre (rayon r, hauteur h)		$2\pi r \times h$	$\pi r^2 \times h$
Pyramide (aire de la base $\mathscr{B}$, hauteur h)		Somme des aires des faces latérales	$\dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$
Cône de révolution (rayon r, hauteur h)			$\dfrac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$

Conception graphique : Julie Lannes
Couverture : Frédéric Jély
Mise en pages : Soft Office
Édition : Christine Lataste
Schémas et illustration : Laurent Blondel – Corédoc